

Zum Begriff und zu Arten stochastischer Vorgänge

Vorbemerkungen

Angeregt durch Diskussionen mit Fachdidaktikerinnen zu meinen Darlegungen zu stochastischen Vorgängen in (Sill 2026, S.117-136), bin ich nach neuen Überlegungen zu teilweisen Veränderungen meiner Auffassungen gelangt. Dabei geht es um die Unterscheidung von Vorgängen im mentalen und im Nichtmentalen, die ich bisher nicht ausreichend betrachtet hatte. Eine Ursache ist die Verwendung des Begriffs „stochastische Situation“ nach (Krüger et al. 2025, S. 12), mit dem Situationen in der *Realität* erfasst werden sollen. Zu den Begriffen „Realität“ und „Wirklichkeit“ gibt es in der Literatur keine intersubjektiven Auffassungen. In der dominierenden Verwendung des Begriffs „Realität“ sind mentale Vorgänge nicht enthalten (Sill 2026, S. 85–89). Eine Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs betrifft die Ergebnisse mentaler Vorgänge. Ich verzichte deshalb auf den Begriff der stochastischen Situation und spreche dafür von stochastischen Vorgängen, die beide Arten der Vorgänge beinhalten.

Daraus ergab sich das Problem der Bestimmung von Objekt, Merkmal und seinen Ausprägungen für mentale Vorgänge, also insbesondere von Denkvorgängen, zudem mit diesem Text eine Lösung vorgeschlagen wird.

Zum Begriff „Stochastik“ gibt es unterschiedliche Auffassungen (vgl. Krüger et al. 2015, S. 3). In Übereinstimmung mit der Verwendung dieser Bezeichnung im AK „Stochastik“, den aktuellen Bildungsstandards und von Henze (2023, S. VI) wird unter Stochastik eine eigenständige, interdisziplinäre Wissenschaftsdisziplin verstanden, die aus den Teilgebieten Beschreibende Statistik, Explorative Datenanalyse, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik besteht. Die Teilgebiete sind historisch im Zusammenhang mit der Bearbeitung von Anwendungsproblemen entstanden. Neben innermathematischen Entwicklungen ist das Hauptfeld wissenschaftlicher Aktivitäten in der Stochastik die Anwendung ihrer Mittel und Methoden zur Lösung praktischer Probleme.

Neben Anwendungsaufgaben haben im Stochastikunterricht auch formale Aufgaben wichtige Funktionen bei der Ausbildung stochastischen Könnens, insbesondere von Orientierungsgrundlagen zentraler Handlungen wie das Erstellen von grafischen Darstellungen oder Baumdiagrammen. Reale Daten oder reale Sachverhalte, die bei diesen Aufgaben auftreten, sind lediglich ein Mittel und sollten in der Regel nicht Gegenstand expliziter Betrachtungen sein.

Zu den Begriffen „Vorgang“ und „Zustand“

Vor der Erklärung des Begriffs „stochastischer Vorgang“ als Grundbegriff der Stochastik soll zunächst der allgemeine Begriff „Vorgang“ expliziert werden. Es gibt für diesen Begriff keinen geeigneten Oberbegriff. Die Wörter Geschehnis, Hergang oder Ablauf sind Synonyme zum Wort „Vorgang“, keines von ihnen lässt sich als philosophischer Terminus explizieren, um als Oberbegriff für „Vorgang“ verwendet zu werden. Das gemeinsame Sem dieser Wörter ist der Bezug zu einer Zeitspanne; alle betreffen etwas, was sich in einer Zeitspanne vollzieht. Dass etwas abläuft, geschieht, vor sich geht, ist aber nur der äußere, sichtbare Aspekt des Begriffs. Das Wesen besteht in der Veränderung des Objekts in Bezug auf ein Merkmal. Deshalb ist es

sinnvoll, den Begriff „Vorgang“ als zeitliche Veränderung eines Objektes in Bezug auf ein Merkmal zu erklären. Im Sinne der Untrennbarkeit von Veränderung und Nichtveränderung soll der Begriff „Vorgang“ beides umfassen.

Der philosophische Begriff „Vorgang“ kann damit durch folgenden *formalen* Aspekt bestimmt werden. Die Formulierung dieses zentralen Begriffs meines philosophischen Systems ist leicht verändert im Vergleich mit der Formulierung in (Sill 2026, S. 72).

Ein **Vorgang** ist die Veränderung oder Nichtveränderung eines Objektes in Bezug auf eines seiner Merkmale in einer Zeitspanne.

Die verwendete Aussagenverbindung „oder“ bedeutet, dass ein Vorgang entweder nur eine Veränderung, nur eine Nichtveränderung oder beides zugleich, d. h. eine Zusammensetzung aus beiden, sein kann.

Die Erklärung des Begriffs durch den formalen Aspekt hat den Charakter einer impliziten Definition mit expliziten Elementen. Das Wort „Vorgang“ ist im Sinne einer axiomatischen Festlegung unbestimmt, es muss im konkreten Fall interpretiert werden. Dagegen sind die Begriffe „Veränderung“ und „Nichtveränderung“ bereits expliziert. Bei der Interpretation des Wortes „Vorgang“ muss eine Zeitspanne angegeben werden und ein Objekt, das sich in dieser Zeitspanne bezüglich eines Merkmals verändert oder nicht verändert sowie die Merkmalsausprägungen.

Bei Vorgängen im Mentalen ist das Objekt die mentale Bewegung bei einer bestimmten Person. Mentale Bewegungen vollziehen sich in der mentalen Struktur der Person. Ein Teilbereich ist das semantische Gedächtnis zur Speicherung von Begriffen und Propositionen. In der Psychologie wird für die Speicherung das Modell eines semantischen Netzwerkes gewählt, das aus Knoten und Kanten besteht. Dieses Modell ist auch für didaktische Fragen der Aneignung und Anwendung von Kenntnissen gut geeignet. Analog zur physikalischen Bewegung kann allgemein ein mentaler Vorgang in folgender Weise erklärt werden.

Ein **mentaler Vorgang** ist die Veränderung oder Nichtveränderung der mentalen Bewegungen einer Person in Bezug auf das Merkmal „Stelle in einem Teilbereich der mentalen Struktur“. Die Ausprägungen des Merkmals sind alle Stellen in dem Teilbereich der mentalen Struktur, zu dem neben dem semantischen Gedächtnis weitere Strukturen gehören, wie etwa Einstellungen oder bildhafte Vorstellungen.

Die „Änderungsrate“ der mentalen Bewegung ist ein Maß für die Flexibilität des Denkens und wird in der Psychologie als geistige Beweglichkeit bezeichnet.

Aus der Erklärung ergibt sich eine neue Sicht auf das Phrasem zum mentalen Vorgang des Denkens: „Ich denke an nichts.“ Seine mantraartige Wiederholung soll bei der Meditation oder beim Einschlafen helfen. Es ist ohnehin unklar, was man unter „nichts“ verstehen soll und wie man daran denken kann. Ich habe das Wort „Nichts“ ausführlich in (Sill 2026, S. 319-342) diskutiert mit dem Ergebnis, dass es als philosophischer Terminus aus mehreren Gründen ungeeignet ist (Sill 2026, S. 342). Nach der obigen Erklärung des Begriffs „mentaler Vorgang“ ist als Ersatz folgendes Mantra für die genannten Zwecke möglich: „Ich denke nicht.“ Dies bedeutet, dass ich mein Denken an einer beliebigen Stelle in meiner mentalen Struktur festhalte, damit es sich nicht bewegt.

In der Alltagssprache beschreibt man diesen mentalen Vorgang meist mit den Worten: „Die Person denkt bzw. überlegt.“ Dies ist eine phänomenologische Sicht auf den Vorgang, die auch im Unterricht für Vorgänge verwendet werden kann, wenn eine analytische Beschreibung im obigen Sinne nicht möglich oder sinnvoll ist. Für eine Lehrkraft ist eine solche Analyse von Interesse, da sie den Blick auf die betreffende mentale Struktur eines Lernenden, ihre Elemente und eventuelle Fehlstellen lenkt.

Als philosophischer Begriff kann „Zustand eines Objektes“ durch folgende *formale* Aspekte erklärt werden:

Ein **Zustand** eines Objektes bezüglich eines Merkmals ist die Ausprägung des Merkmals in einer Zeitspanne, in der sich das Objekt bezüglich des Merkmals nicht verändert.

Der Begriff „Zustand“ ist wie der Begriff „Vorgang“ an eine Zeitspanne gebunden. Sie kann (theoretisch) unendlich klein sein, wie die Momentangeschwindigkeit eines Fahrzeuges, oder auch lang andauern wie der Zustand der Ehe bezüglich des Merkmals „Familienstand“. Ein Zustand ist aber nicht selbst ein Vorgang oder Teil eines Vorgangs, er ist eine Ausprägung des betrachteten Merkmals, also eine Eigenschaft des Objektes. Da der Begriff „Vorgang“ die Veränderung und Nichtveränderung eines Objektes umfasst, kann es im Verlauf eines Vorgangs auch Phasen geben, in denen sich das Objekt bezüglich des Merkmals nicht verändert. Die dann vorhandene Ausprägung des Merkmals ist der Zustand des Objekts in dieser Phase.

Zustand und Vorgang sind untrennbar miteinander verbunden, es gibt keinen Zustand ohne einen dazugehörigen Vorgang und umgekehrt. Zustände sind Bestandteil einer statischen und Vorgänge einer dynamischen Sichtweise auf Existierendes.

Der Zustand am Beginn eines Vorgangs heißt **Anfangszustand** und der Zustand am Ende des Vorgangs heißt **Endzustand**.

Anstelle von „Endzustand“ kann in bestimmten Zusammenhängen, insbesondere in der Alltagssprache oder im Unterricht von **Ergebnis** oder **Resultat** gesprochen werden.

Jeder Vorgang läuft unter bestimmten Bedingungen ab, die Einfluss auf den Verlauf und damit den Endzustand des Vorgangs haben. Die Bedingungen sind dabei selbst Resultate von Vorgängen (die konkreten Windbedingungen beim Segeln ergeben sich aus den Wetterverhältnissen). Bedingungen werden auch als Einflussfaktoren bezeichnet.

Es gibt Vorgänge, die unter wesentlich gleichen Bedingungen wiederholbar sind, wie das Werfen eines Würfels oder die automatische Produktion von technischen Produkten. Die Mehrzahl der Vorgänge ist jedoch nicht unter den gleichen Bedingungen wiederholbar, wie ein Fußballspiel, eine Unterrichtsstunde, das Wirken eines Medikamentes oder das Leben eines Tieres.

Bei dem Problem der Wiederholbarkeit von Vorgängen können zwei Fälle unterschieden werden: das nacheinander Ablaufen von Vorgängen oder das gleichzeitige Ablaufen von Vorgängen. So laufen etwa die Wachstumsvorgänge von Getreidepflanzen eines Feldes, die Lernvorgänge in einer Klasse, die Herausbildung politischer Einstellungen von Bürgern oder die Massenproduktion von Erzeugnissen gleichzeitig ab. Wenn die Ergebnisse dieser gleichzeitig ablaufenden Vorgänge verglichen werden sollen, ist zu untersuchen, inwieweit die Vorgänge unter gleichen oder im Wesentlichen gleichen Bedingungen ablaufen.

Zum Begriff „stochastischer Vorgang“

Stochastische Anwendungsprobleme können aus statischer oder dynamischer Sicht betrachtet werden. Bei einer statischen Betrachtung werden lediglich eingetretene Zustände untersucht. Diese Sichtweise ist sinnvoll, wenn die Entstehung der Zustände nicht betrachtet werden soll bzw. nicht betrachtet werden kann. Beispiele sind geografische Daten wie die Länge von Flüssen oder die Höhe von Bergen. Bei vielen statistischen Angaben zu Pflanzen und Tieren ist eine Betrachtung der Phylogenese nicht angebracht.

Bei Untersuchungen zur Beschaffenheit einer Pflanze, zum Entwicklungsstand der Kenntnisse eines Kindes oder zum Wahlverhalten von Bürgern werden bei einer statischen Sichtweise wesentliche Zusammenhänge nicht erfasst. Die Daten sind ein Ergebnis von Vorgängen, wie dem Wachstum einer Pflanze, der Entwicklung der Kenntnisse eines Kindes oder der Entwicklung politischer Einstellungen von Bürgern. Um sie tiefgründig interpretieren zu können, müssen die Vorgänge, in deren Ergebnis die Daten entstanden sind, und insbesondere die Einflussfaktoren dieser Vorgänge untersucht werden. Einflussfaktoren sind zum Beispiel die Wasserversorgung einer Pflanze, die Gestaltung des Lernprozesses von Kindern oder die Aktivitäten politischer Parteien. Für Vorgänge in Anwendungsbereichen der Stochastik wird der Begriff „stochastischer Vorgang“ verwendet.

Ein **stochastischer Vorgang** ist ein zeitlicher Vorgang der Veränderung oder Nichtveränderung eines Objektes in Bezug auf ein Merkmal mit mehreren möglichen Endzuständen.

Im Unterschied zur bisherigen Begriffserklärung (Sill 2026, S. 120) habe ich die Nichtveränderung einbezogen, da die Formulierung „möglicher Endzustand“ impliziert, dass der Zustand nicht unmöglich ist. Auf die Idee kam ich durch das Beispiel einer Fahrt mit einem Pkw mit dem Merkmal „Unfallfreiheit“. Wenn sich die Ausprägung des Merkmals im Laufe der Fahrt nicht ändert, handelt es sich trotzdem um einen stochastischen Vorgang, da die Möglichkeit eines Unfalls nicht ausgeschlossen ist.

Die Möglichkeit unterschiedlicher Ergebnisse ergibt sich aus den Bedingungen des Vorgangs. Wenn der Vorgang beendet ist und die Ergebnisse als Endzustand etwa im Ergebnis einer statistischen Untersuchung vorliegen, kann man die Tatsache aus dem Blick verlieren, dass auch andere Ergebnisse möglich gewesen wären.

Ein mentaler Vorgang ist ein stochastischer Vorgang, wenn die Überlegungen zu verschiedenen Ergebnissen führen können.

Zu den Arten der Untersuchung stochastischer Vorgänge

Stochastische Vorgänge sind immanenter Bestandteil des täglichen Lebens und Gegenstand zahlreicher wissenschaftlicher Untersuchungen. Für den Alltag werden elementare Kenntnisse und Zugangsweisen zum Umgang mit Daten und Wahrscheinlichkeiten benötigt. In den Wissenschaften ist die Analyse stochastischer Vorgänge ein Bestandteil von Modellierungs- und Problemlöseprozessen.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, stochastische Vorgänge zu analysieren bzw. zu untersuchen. Man kann folgende Arten unterscheiden:

1. Statistische Untersuchungen zu stochastischen Vorgängen, die Mittel und Methoden der Beschreibenden Statistik und Explorativen Datenanalyse verwenden
2. Probabilistische Untersuchungen zu stochastischen Vorgängen, die Mittel und Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik verwenden
3. Kombinationen beider Zugangsweisen

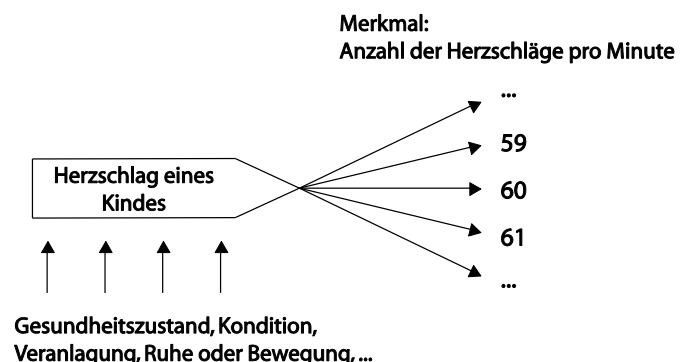
Wie im allgemeinen Fall der Anwendung von Mathematik müssen auch bei diesen Untersuchungen drei Ebenen der Modellierung unterschieden werden: die Ebene der Realität, die Ebene der Realmodelle und die Ebene der theoretischen Modelle (Krüger et al. 2015, S. 13). In der dominierenden Verwendung des Begriffs „Realität“ sind mentale Vorgänge nicht enthalten ihre Modellierung kann in gleicher Weise erfolgen. Zur sprachlichen Vereinfachung wird in diesem Fall auch von einem Realmodell gesprochen. Wenn z. B. der mentale Vorgang der Überlegungen eines Arztes bei der Diagnose einer Krankheit modelliert werden soll, kann im Unterricht als Realmodell von der Basisrate für die Krankheit ausgegangen und von ersten Einschätzungen des Arztes nach einer Eingangsuntersuchung des Patienten abgesehen werden.

Ein weiteres Problem ist die Formulierung „stochastischer Vorgang“, die auf allen drei Modellierungsebenen verwendet wird, da es keine spezifischen Bezeichnungen gibt. Wenn der Prozess der Modellierung im Unterricht explizit diskutiert wird, ist es möglich, von einem „realen oder mentalen stochastischen Vorgang“ bzw. einem „stochastischen Vorgang in der Realität oder im Mentalen“ und einem Modell dieses Vorgangs zu sprechen. Zur schematischen Darstellung auf der Ebene der Realmodelle ist ein „Prozessschema“ geeignet (Krüger et al. 2015, S. 15–16), das im folgenden Beispiel verwendet wird.

Die Beschreibung eines Vorgangs kann in der Schule in phänomenologischer Weise erfolgen, ohne dazu den axiomatisch festgelegten Begriff „Merkmal“ zu interpretieren. Der Weitsprung einer Schülerin kann phänomenologisch mit „Anna macht einen Weitsprung“ beschrieben werden. Das Merkmal ist in diesem Fall, wie bei jeder physikalischen Bewegung, der Ort mit den Merkmalsausprägungen vom Absprung bis zur Landung. Die Sprungweite ist der Abstand zwischen beiden Orten. Im Realmodell des Vorganges wird von einem genau bestimmbar Ort der Landung ausgegangen.

Statistische Untersuchungen zu stochastischen Vorgängen

Als Beispiel sei die Herztätigkeit eines Kindes betrachtet. Dieser reale Vorgang kann durch einen Kardiologen aus Sicht verschiedener Merkmale modelliert und untersucht werden. Für eine statistische Untersuchung in der Schule ist als Realmodell für den Vorgang die Beschränkung auf den Herzschlag mit dem Merkmal Anzahl der Herzschläge pro Minute sinnvoll. Diese lassen sich ohne Materialaufwand durch Fühlen des Pulses ermitteln (Krüger et al. 2015, S. 35 f.).



Das grafische Schema zu dem Beispiel hat folgende Form (Krüger et al. 2015, S. 36)

Zu diesem stochastischen Vorgang sind folgende statistische Untersuchungen möglich:

- (1) Es wird durch Messen des Pulses ein aktueller Zustand untersucht, der sich in der Zeit des Messvorgangs nicht ändern darf.
- (2) Es wird der Puls vor und nach einer körperlichen Anstrengung ermittelt. Ein Ergebnis dieser Untersuchung ist die Differenz der Pulse.
- (3) Bei einem langfristigen Training kann die Pulsänderung bei Belastung zu Beginn und am Ende einer Trainingsphase ermittelt werden, um den Effekt des Trainings zu bestimmen.

Im 1. Fall handelt es sich um einen **Messvorgang**. Sein stochastischer Charakter, der sich aus den Messfehlern ergibt, kann in der Schule kaum verdeutlicht werden. Eine Möglichkeit wäre die Wiederholung der Messung bei demselben Schüler ohne Veränderung der äußeren Bedingungen.

In den beiden anderen Fällen bezieht sich das Merkmal auf einen Vorgang, bei dem Anfangs- und Endzustand bestimmt werden. Die Veränderung der Ausprägung des Merkmals ist sichtbar, die Existenz möglicher Ergebnisse ist leicht einzusehen. Eine Wiederholung des gleichen Belastungstests in der nächsten Unterrichtsstunde kann dies verdeutlichen. Im 3. Fall handelt es sich um einen langfristigen **Entwicklungsvorgang**, der in einer Sportgruppe untersucht werden könnte.

In dem vorgeschlagenen Prozessschema sind keine Angaben zum Anfangszustand und zur Zeitspanne des Vorganges enthalten. Der Hintergrund ist, dass in der Schule selten Untersuchungen zur Veränderung der Ausprägung eines Merkmals zu Beginn und am Ende eines Vorgangs erfolgen. In den meisten Fällen werden statistische Untersuchungen wie im 1. Fall zu einem Zustand durchgeführt. Betrachtungen zum stochastischen Charakter der durchzuführenden Messvorgänge sind selten in schülergemäßer Weise möglich. So kann etwa bei der Messung physikalischer Größen wie Länge und Masse das Problem der Messgenauigkeit thematisiert werden.

Ein erweitertes Schema mit Angaben zum Ausgangszustand eines Vorgangs ist in der Schule nicht erforderlich.

Die vorgeschlagenen Prozessbetrachtungen im Rahmen statistischer Untersuchungen beziehen sich zunächst immer auf einen einzelnen Vorgang. Dies begünstigt Überlegungen zum realen Vorgang und den wirkenden Bedingungen und damit einen lebensverbundenen Unterricht. Auch wenn nur Zustände untersucht werden, sind Überlegungen zu den Vorgängen, in deren Ergebnis der Zustand entstanden ist, und den wirkenden Bedingungen möglich.

- Wenn in einer Klasse Daten zur Dauer des Schulweges erhoben werden, kann die Vorstellung des eigenen Schulweges und seines zeitlichen Ablaufes zu Erkenntnis der Bedingungen des Vorgangs und ihrer möglichen Veränderung führen.
- Werden Daten zur Handynutzung erhoben, führt die Frage nach dem zugrunde liegenden Vorgang zum Prozess der Entscheidung des Handynutzers und den dabei wirkenden Bedingungen.
- Auch bei einer Untersuchung zur Mitgliedschaft in einem Sportverein kann die Betrachtung des Vorgangs, der zur Mitgliedschaft führte, nämlich das Treffen der

Entscheidung, Mitglied zu werden, also die Veränderung des Merkmals „Mitgliedschaft“, zu angeregten Diskussionen führen.

- Bei einer Befragung zu Lieblingstieren kann über den Vorgang der Veränderung der Einstellung zu Tieren seit dem Kindesalter gesprochen werden.
- Wenn eine Lehrkraft am Ende eines Stoffgebietes eine Arbeit auswertet, so wird sie den Vorgang der Veränderung bestimmter Merkmale wie neue Kenntnisse, Fertigkeiten, Einstellungen u. a. seit Beginn des neuen Stoffgebietes betrachten und individuelle Rückmeldungen geben.

Nicht bei jeder statistischen Untersuchung in der Schule ist ein Blick zurück auf die realen Vorgänge, ihre Bedingungen und die Veränderung von Ausprägungen bestimmter Merkmale sinnvoll und angebracht.

Die bei statistischen Untersuchungen eines stochastischen Vorgangs am Beginn und Ende des Vorgangs erfolgenden Messvorgänge sind ebenfalls stochastische Vorgänge. Ein Messvorgang ist allerdings nur dann ein stochastischer Vorgang, wenn er mehrere mögliche Ergebnisse haben kann. Bei einem Messvorgang wird die Ausprägung eines messbaren Merkmals ermittelt. Der reale Vorgang des Messens ist ein zeitlicher Vorgang. Anfang und Ende sind der Beginn und das Ende der Messung. Die zu messende Merkmalsausprägung ändert sich beim Vorgang des Messens nicht. Das Merkmal bei diesem Vorgang ist aber nicht die tatsächliche Ausprägung, sondern die gemessene Ausprägung. Diese gemessene Ausprägung, der Messwert, ändert sich im Laufe der Messung. Zu Beginn des Messvorgangs, etwa vor einem Weitsprung, einem 100-Meter-Lauf, dem Einschalten eines Messgerätes, vor einer Wählerbefragung oder dem Zählen der Anzahl der gezogenen Kugeln, ist der Wert oft gleich 0 oder unbekannt. Erst am Ende des Messvorgangs gibt es einen Messwert. Bei der Messung von Größen wie Länge, Zeit, Masse oder Volumen mit einer metrischen Skala gibt es durch die Messgenauigkeit der Messgeräte Abweichungen des Messwertes vom eigentlichen Wert. Auch bei einer Befragung ist es ein zentrales Problem, ob das Befragungsergebnis der tatsächlichen Ausprägung der zu messenden psychischen Dispositionen entspricht.

Wenn Anzahlen gemessen werden, wie etwa die gewürfelte Augenzahl bei einem Würfel oder die Anzahl der gezogenen Kugeln, stimmt der Messwert in der Regel mit dem eigentlichen Wert überein. In diesem Fall handelt es sich nicht um einen stochastischen Vorgang.

Ein unterschätztes Problem sind statistische Untersuchungen zum Werfen von Objekten. Als Beispiel sei „Werfen eines Spielwürfels“ betrachtet. Es müssen zunächst die Begriffe „werfen“ und „Spielwürfel“ expliziert werden. Werfen bedeutet in diesem Fall, dass die Person den Würfel aus der Hand oder einem Würfelbecher auf eine Unterlage fallen lässt. Dabei muss sich die räumliche Lage des Würfels ändern. Ein Spielwürfel ist ein handelsüblicher Würfel für Gesellschaftsspiele, auf dessen Seitenflächen die Zahlen 1–6 auf je eine Seite eingetragen sind. Als Bezugsmenge für die Bestimmung des Merkmals können alle gegenständlichen Objekte verwendet werden, die geworfen werden können. Das Merkmal ist die räumliche Lage dieses Objektes. Die Ausprägungen des Merkmals sind alle möglichen räumlichen Lagen des Gegenstandes. Der Anfangszustand ist die Ausgangslage des Würfels, bevor er in die Hand genommen oder in den Würfelbecher gelegt wird. Der Endzustand ist die Lage des Würfels nach dem Werfen. Bei der Durchführung der statistischen Untersuchung werden in einem Realmodell

nur solche Endlagen berücksichtigt, bei denen der Würfel mit einer Seitenfläche parallel zur Unterlage liegt und die Augenzahl auf der oben liegenden Seitenfläche abgelesen werden kann.

Solche Betrachtungen sind kein Gegenstand des Schulunterrichts. Sie verdeutlichen Probleme der Beziehungen von realem Vorgang und seiner Modellierung beim Werfen von gegenständlichen Objekten, was gegenwärtig öfter für den Stochastikunterricht vorgeschlagen wird. Es ist fraglich, ob Schüler in ihrer Freizeit mit Holzquadern, Legobausteinen, Topfschwämmen, Reißzwecken, Wäscheklammern, Flaschendeckeln, Baseballmützen, Knöpfen oder Teelöffeln werfen und sich Gedanken über die möglichen Lagen und deren Häufigkeit nach dem Wurf machen. Bereits Freudenthal hat 1975 am Beispiel des Werfens eines Reißnagels auf die Fragwürdigkeit solcher Aufgaben hingewiesen.

Probabilistische Untersuchungen zu stochastischen Vorgängen

Mit dieser Art der Untersuchung von stochastischen Vorgängen ist der Begriff „Wahrscheinlichkeit“ verbunden, zu dem es unterschiedliche Auffassungen zum Begriffsinhalt und Bezeichnungen in der Literatur gibt. Wahrscheinlichkeit ist zunächst ein axiomatisch festgelegtes, also inhaltsloses Wort im Axiomensystem von Kolmogorov (1933, S. 2). Durch verschiedene Interpretationen entstehen unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsbegriffe, die oft mit adjektivischen Zusätzen wie „objektiv“, „subjektiv“ und vielen anderen verbunden werden. Diese Fülle von Wortverbindungen ist verwirrend und zum Teil missverständlich, wie etwa „empirische Wahrscheinlichkeit“ (Humenberger 2019). Man kann auf adjektivische Zusätze verzichten, wenn aus dem Kontext hervorgeht, in welcher Bedeutung „Wahrscheinlichkeit“ gemeint ist.

Es lassen sich drei Arten stochastischer Vorgänge unterscheiden, in denen Interpretationen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs angewendet werden.

Bei der **ersten Art** handelt es sich um Vorgänge, die unter annähernd gleichen Bedingungen wiederholt werden können. Das typische Beispiel sind Glücksspielsituationen. Weitere Beispiele sind Wachstumsvorgänge von Pflanzen und Tieren, das Herstellen von Produkten in immer der gleichen Weise oder das Wirken von Medikamenten bei Menschen mit vergleichbaren physischen Eigenschaften. Die Wahrscheinlichkeit der Endzustände wird durch das Denken eines Menschen nicht beeinflusst, d. h. sie existiert in diesem Sinne unabhängig („objektiv“) von Menschen. In diesem Fall können durch zahlreiche Wiederholungen relative Häufigkeiten der interessierenden Ergebnisse ermittelt werden, die nach dem Gesetz der großen Zahlen Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse sind.

Bei probabilistischen Untersuchungen der ersten Art können in der Regel zwei Vorgänge unterschieden werden: der reale Vorgang und seine Modellierung sowie der mentale Vorgang der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten. Insbesondere bei Aufgaben zu mehrstufigen Vorgängen kann diese Unterscheidung eine Hilfe bei der Bearbeitung der Aufgaben sein, wie an folgender Aufgabe verdeutlicht werden soll.

Ein großer Möbelhändler lässt bei einer Firma im Ausland Schränke herstellen, die in Kartons verpackt geliefert und verkauft werden. Aus durchgeführten Gütekontrollen weiß man, dass bei etwa 1 % der produzierten Teile mindestens ein Loch nicht korrekt vorgebohrt ist, bei 2 % der Teile Lackschäden auftreten und 4 % der Teile nicht maßgenau

sind. Die Kartons liegen in Regalen und werden von den Kunden selbst herausgenommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein gekaufter Schrank

- a) alle drei Schäden aufweist?
- b) genau einen Schaden aufweist? (Krüger et al. 2015, S. 137)

Für die Betrachtungen zum realen Vorgang der Herstellung eines Schrankes werden die Zahlenangaben zu den Fehlerquoten außer Acht gelassen. Das Besondere an der Aufgabe ist, dass an einem Objekt drei Merkmale in jeweils zwei Ausprägungen betrachtet werden. Um zu der entscheidenden Lösungsidee für die Aufstellung eines Baumdiagramms zu kommen, kann man sich die drei Fehler bildhaft vorstellen und erkennen, dass das Auftreten eines Fehlers nicht von einem eventuell schon vorhandenen Fehler abhängig ist. Eine weitere Hilfe zur Aufstellung des dreistufigen Baumdiagramms ist die Vorstellung, dass die Gütekontrollen am selben Schrank nacheinander erfolgen. Erst nach der Aufteilung des Baumdiagramms sollte der mentale Vorgang zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten beginnen. Dabei erfolgt eine Bewegung im Teilbereich der mentalen Struktur zum stochastischen Können, in dem das Verhältnis von relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit, die Angabe von Wahrscheinlichkeiten als Bruch und als Prozentangabe sowie die Pfadregeln gespeichert sind.

Bei der **zweiten Art** geht es um Denkvorgänge von Menschen zu Prognosen von Wahrscheinlichkeiten oder zum Vergleich von Wahrscheinlichkeiten künftiger Ergebnisse eines stochastischen Vorgangs. Diese Prognosen beruhen auf dem Erwartungsgefühl der jeweiligen Person zum Eintreten des Ergebnisses. Es geht in diesem Fall nicht um die Anwendung von Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Erforderlich ist lediglich ein elementares Verständnis zum Begriff der Wahrscheinlichkeit und seiner qualitativen Erfassung auf einer Skala. Das Ergebnis des Denkvorgangs kann sich ändern, wenn der Mensch neue Informationen über diesen Vorgang erhält.

Ein Beispiel aus der Primarstufe ist:

Schätze die Wahrscheinlichkeit ein, dass du länger als 30 Sekunden die Luft anhalten kannst. Markiere sie auf der Wahrscheinlichkeitsskala.

Diese subjektbezogenen Schätzungen sind Bestandteil des täglichen Lebens. Beispiele:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- (1) es morgen regnet,
- (2) mein Zug morgen pünktlich fährt.

Die Schätzung der Wahrscheinlichkeit kann sich bei neuen Informationen ändern, so z. B. wenn man den Wetterbericht gehört hat oder die Pünktlichkeit des Zuges in den letzten Tagen kennt. Wahrscheinlichkeiten werden im Alltag auch zu den Ergebnissen von sportlichen Ereignissen, kulturellen Höhepunkten oder politischen Vorgängen geschätzt.

Bei der **dritten Art** geht es ebenfalls um Denkvorgänge von Menschen zu Ergebnissen stochastischer Vorgänge. In diesem Fall ist aber der Vorgang bereits beendet, das eingetretene Ergebnis ist dem Menschen, der eine Schätzung der Wahrscheinlichkeit vornehmen soll, unbekannt. Ein Beispiel ist folgende Aufgabe aus der Primarstufe:

Ein Spieler würfelt verdeckt mit einem Würfel und der andere muss die Wahrscheinlichkeit schätzen und auf einer Wahrscheinlichkeitsskala markieren, dass

eine bestimmte Augenzahl gewürfelt wurde. Nach der ersten Schätzung gibt der Spieler dem anderen eine Information zu der Augenzahl, ohne sie zu verraten, wie z. B., dass die Zahl gerade oder größer als drei ist. Nun schätzt der andere erneut die Wahrscheinlichkeit und ändert die Markierung auf der Skala.

In diesem Fall treten zwei Vorgänge auf, das Würfeln und danach die Mitteilung von Informationen zum Würfelergebnis. Zu beiden Vorgängen vollzieht sich jeweils ein mentaler Vorgang zur Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit. Diese Wahrscheinlichkeiten werden in der Bayes-Statistik allgemein als a-priori- und a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten bezeichnet. Sie sind die Wahrscheinlichkeiten am Anfang und Ende des Erkenntnisvorgangs einer Person. Eine Betrachtung des Anfangszustandes erfolgt bei Vorgängen der ersten Art stochastischer Vorgänge in der Regel nicht, da es vor allem um die Untersuchung von Häufigkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten der Endzustände geht.

Weitere Beispiele aus dem Unterricht für stochastische Vorgänge der dritten Art sind die Ermittlung der Wahrscheinlichkeit für das Vorliegen einer seltenen Krankheit beim positiven Testergebnis und das sogenannte Ziegenproblem.

Weitere bedeutsame Beispiele für diese Vorgänge in der Wissenschaft sind Untersuchungen zur Wirksamkeit eines neuen Medikamentes, einer neuen Psychotherapie oder einer neuen Lernmethode. Aber auch im Alltag spielen sie eine große Rolle, wenn sich Einstellungen eines Menschen zu familiären, moralischen, kulturellen oder politischen Fragen in Abhängigkeit von neuen Erfahrungen oder Informationen ändern. Bei diesen Einstellungen geht es um geschätzte Wahrscheinlichkeiten der Eigenschaften eines Familienmitgliedes, der Bedeutung moralischer Normen, dem Wert eines Kulturguts oder der Qualität der Tätigkeit politischer Parteien. Generell kann man diese Vorgänge als Lernen aus Erfahrungen bezeichnen.

Man kann probabilistische Untersuchungen zu Vorgängen der ersten Art nicht auf die Anwendung von Mitteln und Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der klassischen beurteilenden Statistik beschränken. Mit Mitteln der Bayes-Statistik lässt sich z. B. die Wahrscheinlichkeitsdichte für einen Anteil auf der Grundlage von Daten ermitteln (vgl. Bätting 2017, S. 121). Der Satz von Bayes, der bei Vorgängen der dritten Art eine zentrale Rolle spielt, gehört aus mathematischer Sicht zur klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Bei der zweiten und dritten Art probabilistischer Untersuchungen sind die Endzustände, deren Wahrscheinlichkeit ermittelt wird, Aussagen von Menschen. In der Wissenschaft werden solche mit Unsicherheit behafteten Aussagen als Hypothesen bezeichnet. Eine Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeit von Hypothesen ist sinnlos. Bei der ersten Art sind die Endzustände reale Objekte, wie die Augenzahl beim Würfeln oder die eingetretene Wirkung eines Medikaments. In diesem Fall ist eine Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeit der Endzustände möglich, mit der die zu erwartende Anzahl eines Endzustandes bei einer großen Zahl von Wiederholungen ermittelt werden kann.

Eine probabilistische Untersuchung der Wirksamkeit eines neuen Medikamentes kann mit der ersten oder dritten Art der Untersuchungen erfolgen. Bei der ersten Art wird die in einer Population ermittelte Heilungsquote mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung eines bisherigen Medikaments in Beziehung gesetzt, um auf der Grundlage einer festgelegten Irrtumswahrscheinlichkeit zu ermitteln, ob es sich um eine signifikante Abweichung handelt.

Das Vorliegen einer solchen Abweichung wird auch als Hypothese bezeichnet, der aber keine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann. Das Ziel der Untersuchung ist es, eine Entscheidung zu treffen, ob eine signifikante Abweichung vorliegt und damit das neue Medikament als wirkungsvoller als das alte angenommen werden kann. Dieses als Signifikanztest bezeichnete Vorgehen sowie auch die auf der gleichen Art beruhende Berechnung von Konfidenzintervallen ist Gegenstand des Stochastikunterrichts in der Sekundarstufe II.

Bei der dritten Art der Untersuchung, die als Bayes-Methode bezeichnet wird, erhält man bei einer angenommenen a-priori-Verteilung eine Dichteverteilung für die ermittelte Heilungsquote, aus der sich Wahrscheinlichkeiten für Intervalle der Heilungsquote berechnen lassen. Voraussetzung für die Anwendung dieser Methode im Unterricht ist die Behandlung stetiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ein Programm mit einer implementierten Beta-Verteilung, die gegenwärtig nicht erfüllt sind. Die breite Anwendung Bayes'scher Methoden in Wissenschaft und Technik (Bättig 2017) spricht für eine verstärkte Berücksichtigung probabilistischer Untersuchungen der dritten Art beginnend in der Primarstufe.

In allen bisherigen Beispielen für probabilistische Untersuchungen wurde das Wort „Wahrscheinlichkeit“ ohne weitere Zusätze verwendet, obwohl es sich um unterschiedliche Interpretationen des axiomatischen Begriffs handelt. Dies entspricht der Verwendung des Wortes „Vektor“ für unterschiedliche Interpretationen des axiomatischen Vektorbegriffs und vereinfacht die Sprechweise im Unterricht, aber auch in Wissenschaften. In wissenschaftlichen Metabetrachtungen können darüber hinaus die verschiedenen Interpretationen als Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs bezeichnet werden.

Es gibt keine Notwendigkeit, anstelle des Wortes „Wahrscheinlichkeit“ andere Wörter zu verwenden, wie es in der Literatur z. T. auftritt. So findet man etwa die Bezeichnungen Eintrittswahrscheinlichkeit, Auftrittswahrscheinlichkeit, Eintrittserwartung oder Plausibilität häufig auch in Literatur für die Primarstufe. Dass dies zu einem besseren Verständnis des Wahrscheinlichkeitsbegriffs bei Kindern führt, ist eine gefährliche Illusion. Dies beweist die Geschichte der Propädeutik anderer Themenbereiche in der Primarstufe.

Wie bei statistischen Untersuchungen können sich auch bei probabilistischen Untersuchungen aus Analysen des realen Vorgangs interessante Diskussionen zu Problemen aus der Umwelt der Schülerinnen und Schüler ergeben. Beim oben genannten Beispiel zum Anhalten der Luft sind Betrachtungen zur Entwicklung dieser Fähigkeit seit der Geburt und ihrer Beeinflussung durch gezieltes Training bei bestimmten Sportarten möglich. Zu einer Aufgabe zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, bei einer Fahrkartenkontrolle in einer Straßenbahn einen Schwarzfahrer anzutreffen, auf der Grundlage von erhobenen Daten (Krüger et al. 2015, S. 83 f.), könnte Folgendes diskutiert werden: Stellt man sich einen einzelnen Kontrollvorgang vor, so ergibt sich die Frage, ob der Kontrolleur den Fahrgast wirklich zufällig auswählt oder eher nach seinen bisherigen Erfahrungen für typische Kandidaten einer Schwarzfahrt. Fragt man nach den Bedingungen für den Nichterwerb einer Fahrkarte, führt dies auf die Betrachtung des Vorgangs der Entwicklung von Einstellungen zur Einhaltung von Normen in der Gesellschaft.

Literatur

Bättig, Daniel (2017): Angewandte Datenanalyse. Der Bayes'sche Weg. 2. Aufl. 2017. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg

Henze, Norbert (2023): Stochastik für Einsteiger. Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls. 14., überarbeitete und ergänzte Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Humenberger, Hans (2019): Der „empirische Wahrscheinlichkeitsbegriff“ – gut gemeint, aber auch wirklich gut? In: *Stochastik in der Schule* 39 (3), S. 17–19.

Kolmogorov, Andrej Nikolaevič (1933): Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: Springer (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete).

Krüger, Katja; Sill, Hans-Dieter; Sikora, Christine (2015): Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I. Aufl. 2015. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Sill, Hans-Dieter (2026): Neue Philosophie. Berlin: verlag am park in der edition ost Verlag und Agentur GmbH.