

## Zitate und Gedanken zu Schriften von Gottlob Frege

### Inhalt

Zitate und Gedanken zu Schriften von Gottlob Frege .....	1
Vorbemerkungen.....	1
Wahrheit und Gedanke.....	1
Sinn und Bedeutung .....	3
Begriff und Gegenstand .....	3
Eigenschaft und Merkmal .....	5
Zusammenfassende Bemerkungen .....	7
Literaturverzeichnis.....	9

### Vorbemerkungen

Es wurden wichtige Arbeiten von Frege in Bezug auf die genannten Begriffe analysiert. Dazu wurde unter anderem den in dem Buch von Kutschera (1989) enthaltenen Zitaten nachgegangen. Viele Zitate wurden nicht den Originalschriften von Frege sondern den „Ausgewählten Schriften zur Philosophie der Logik und Sprache“, (Frege 2021a) entnommen.

Alle Texte mit linkem Einzug außer den Aufzählungen sind Zitate.

### Wahrheit und Gedanke

Erst nachdem wir die Gesetze des Wahrseins erkannt haben, können wir das entscheiden; dann aber werden wir die Ableitung und Erklärung des seelischen Vorganges wahrscheinlich entbehren können, wenn es uns darauf ankommt zu entscheiden, ob das Fürwahrhalten, in das es ausläuft, gerechtfertigt ist [Fußnote: In ähnlicher Weise hat man etwa gesagt: „Ein Urteil ist etwas, was entweder wahr oder falsch ist.“ In der Tat gebrauche ich das Wort „Gedanke“ ungefähr in dem Sinne von „Urteil“ in den Schriften der Logiker.]. Um jedes Mißverständnis auszuschließen und die Grenze zwischen Psychologie und Logik nicht verwischen zu lassen, weise ich der Logik die Aufgabe zu, die Gesetze des Wahrseins zu finden, nicht die des Fürwahrhaltens oder Denkens. In den Gesetzen des Wahrseins wird die Bedeutung des Wortes „wahr“ entwickelt (Frege 1993, S. 33).

Ohne damit eine Definition geben zu wollen, nenne ich Gedanken etwas, bei dem überhaupt Wahrheit in Frage kommen kann. Was falsch ist, rechne ich also ebenso zu den Gedanken, wie das, was wahr ist. Demnach kann ich sagen: der Gedanke ist der Sinn eines Satzes, ohne damit behaupten zu wollen, daß der Sinn jedes Satzes ein Gedanke sei. Der an sich unsinnliche Gedanke kleidet sich in das sinnliche Gewand des Satzes und wird uns damit faßbarer. Wir sagen, der Satz drücke einen Gedanken aus. Der Gedanke ist etwas Unsinnliches, und alle sinnlich wahrnehmbaren Dinge sind von dem Gebiete dessen auszuschließen, bei dem überhaupt Wahrheit in Frage kommen kann. Wahrheit ist nicht eine Eigenschaft, die einer besonderen Art von Sinneseindrücken entspricht. So unterscheidet sie sich scharf von Eigenschaften, die wir mit den Wörtern „rot“, „bitter“, „fliederduftend“ benennen. Aber sehen wir nicht, daß die Sonne aufgegangen ist? Und sehen wir nicht damit auch, daß dies wahr ist?

Daß die Sonne aufgegangen ist, ist kein Gegenstand, der Strahlen aussendet, die in mein Äuge gelangen, ist kein sichtbares Ding wie die Sonne selbst. Daß die Sonne aufgegangen ist, wird auf Grund von Sinneseindrücken als wahr erkannt. Dennoch ist das Wahrsein keine sinnlich wahrnehmbare Eigenschaft. Auch das Magnetischsein wird auf Grund von Sinneseindrücken an einem Dinge erkannt, obwohl dieser Eigenschaft ebensowenig wie der Wahrheit eine besondere Art von Sinneseindrücken entspricht. Darin stimmen diese Eigenschaften überein. Um aber einen Körper als magnetisch zu erkennen, haben wir Sinneseindrücke nötig. Wenn ich es dagegen wahr finde, daß ich in diesem Augenblick nichts rieche, so tue ich das nicht auf Grund von Sinneseindrücken (Frege 1993, S. 33–34).

Das Fassen der Gedanken setzt einen Fassenden, einen Denkenden voraus. Dieser ist dann Träger des Denkens, nicht aber des Gedankens. Obgleich zum Bewußtseinsinhalte des Denkenden der Gedanke nicht gehört, muß doch in dem Bewußtsein etwas auf den Gedanken hinzielen. Dieses darf aber nicht mit dem Gedanken selbst verwechselt werden. ... Der Gedanke gehört weder als Vorstellung meiner Innenwelt noch auch der Außenwelt, der Welt der sinnlich wahrnehmbaren Dinge an (Frege 1993, S. 50).

Dadurch aber, daß ich einen Gedanken fasse, trete ich zu ihm in eine Beziehung und er zu mir. Es ist möglich, daß derselbe Gedanke, der heute von mir gedacht wird, gestern nicht von mir gedacht wurde. Damit ist die strenge Unzeitlichkeit des Gedankens allerdings aufgehoben. Aber man wird geneigt sein, zwischen wesentlichen und unwesentlichen Eigenschaften zu unterscheiden und etwas als zeitlos anzuerkennen, wenn die Veränderungen, die es erfährt, nur die unwesentlichen Eigenschaften betreffen. Unwesentlich wird man eine Eigenschaft eines Gedankens nennen, die darin besteht oder daraus folgt, daß er von einem Denkenden gefaßt wird (Frege 1993, S. 52).

Wie wirkt ein Gedanke? Dadurch, daß er gefaßt und für wahr gehalten wird. Das ist ein Vorgang in der Innenwelt eines Denkenden, der weitere Folgen in dieser Innenwelt haben kann, die, auf das Gebiet des Willens übergreifend, sich auch in der Außenwelt bemerkbar machen (Frege 1993, S. 53).

### **Gedanken:**

- Frege bezeichnet den Gedanken als etwas „Unsinnliches“. Ein Gedanke gehört für ihn nicht zum „Bewusstseinsinhalt des Denkenden“. Es sind „alle sinnlich wahrnehmbaren Dinge ... auszuschließen“. Mit diesen beiden Momenten seines Begriffs „Gedanke“ stellt er sich außerhalb der üblichen Verwendung dieses Wortes. Ein Gedanke ist im üblichen Sinne ein Bestandteil oder Ergebnis des Denkens und kann auf jeden Fall auch wahrnehmbare Dinge beinhalten. Um den Bezug des Gedankens zum Denken auszudrücken verwendet Frege die seltsame Formulierung, dass von einem Denkenden der Gedanke gefasst werden kann, wobei der Denkende zwar Träger des Denkens aber nicht des Gedankens ist.
- Frege bindet seinen Begriff des Gedankens an die Wahrheit eines Satzes im logischen Sinne. Er ist der Meinung, dass die Grenze zwischen Psychologie und Logik nicht verwischt werden sollte und unterscheidet entsprechend das „Fürwahrhalten“ in der Psychologie und das „Wahrsein“ in der Logik, in der die Bedeutung des Wortes „wahr“ zu entwickeln sei. Wahrheit ist für ihn keine Eigenschaft von Sinneseindrücken. Damit grenzt er aus seinen Betrachtungen alle philosophischen Überlegungen zum Begriff der Wahrheit aus, die untrennbar mit Überlegungen zu realen Zusammenhängen verbunden sind. Selbst so einer einfachen Feststellung wie, dass die Sonne aufgegangen ist, misst er keine Wahrheit bei mit der seltsamen Begründung, dass die sprachliche Formulierung „die Sonne ist aufgegangen“ kein Gegenstand ist, der Strahlen aussendet.
- Die Bedeutung, die Frege den Begriff „Gedanke“ zuordnet, entspricht der Bedeutung des Wortes „Beweisgedanke“ in einem mathematischen Beweis im entäußerten Sinn. Ein Beweisgedanke ist ein wahrer Schluss innerhalb eines Beweises. Er ist nicht an eine denkende Person gebunden, außer der Person, die ihn einmal gedacht hat, und hat keinen sinnlichen Charakter.

## Sinn und Bedeutung

Es liegt nun nahe, mit einem Zeichen (Namen, Wortverbindung, Schriftzeichen) außer dem Bezeichneten, was die Bedeutung des Zeichens heißen möge, noch das verbunden zu denken, was ich den Sinn des Zeichens nennen möchte, worin die Art des Gegebenseins enthalten ist. Aus dem Zusammenhange geht hervor, daß ich hier unter „Zeichen“ und „Namen“ irgendeine Bezeichnung verstanden habe, die einen Eigennamen vertritt, deren Bedeutung also ein [bestimmter]<sup>1</sup> Gegenstand ist (dies Wort im weitesten Umfange genommen), aber kein Begriff und keine Beziehung, auf die in einem anderen Aufsätze näher eingegangen werden soll. (Frege 2021b, S. 108).

Von den Vorstellungen und Anschauungen soll im Folgenden nicht mehr die Rede sein; sie sind hier nur erwähnt worden, damit die Vorstellung, die ein Wort bei einem Hörer erweckt, nicht mit dessen Sinne oder dessen Bedeutung verwechselt werde. Um einen kurzen und genauen Ausdruck möglich zu machen, mögen folgende Redewendungen festgesetzt werden: Ein Eigenname (Wort, Zeichen, Zeichenverbindung, Ausdruck) drückt aus seinen Sinn, bedeutet oder bezeichnet seine Bedeutung. Wir drücken mit einem Zeichen dessen Sinn aus und bezeichnen mit ihm dessen Bedeutung (Frege 2021b, S. 111).

**Kutschera (1989) schreibt dazu:**

Frege nimmt also — zunächst für Namen — zwei semantische Funktionen an: Sie drücken einen Sinn aus und bezeichnen eine Bedeutung. Diese Terminologie macht uns heute Schwierigkeiten: Wir nennen den Sinn eines Ausdrucks auch dessen „Bedeutung“ und das, was Frege „Bedeutung“ nennt, seinen „Bezug“, seine „Extension“ oder „Denotation“. Um Mißverständnisse zu vermeiden, versehen wir das Wort „Bedeutung“ im folgenden mit dem Index F, wo es im Sinne Freges (also als Bezug) zu verstehen ist. (Kutschera 1989, S. 64).

### **Gedanken:**

- Frege verwendet den Begriff „Bedeutung“ noch weit eingengter, als es Kutschera darstellt. Die Bedeutung in seinem Sinne ist ein „bestimmter Gegenstand“, der mit dem „Zeichen (Namen, Wortverbindung, Schriftzeichen)“ bezeichnet wird. Das ist weit weniger als die gesamte Extension des Begriffs. Weiterhin grenzt er von dem Begriff „Bedeutung“ in seinem Sinne Vorstellungen und Anschauungen eines Menschen zu dem Begriff aus.
- Diese Art der Betrachtung entspricht der Gleichsetzung von Begriff und einer fachwissenschaftlichen Definition, wie es in der Mathematik verbreitet ist. Bei einer solchen Begriffserklärung spielen anschauliche Vorstellungen keine Rolle.
- Der Sinn und Bedeutung von „Sinn“ im Fregeschen Sinn bleibt unklar. Was heißt es, mit einem Zeichen dessen Sinn auszudrücken?

## Begriff und Gegenstand

Das Wort „Begriff“ wird verschieden gebraucht, theils in einem psychologischen, theils in einem logischen Sinne, theils vielleicht in einer unklaren Mischung von beiden. Diese nun einmal vorhandene Freiheit findet ihre natürliche Beschränkung in der Forderung, dass die einmal angenommene Gebrauchsweise festgehalten werde. Ich habe mich nun dafür entschieden, einen rein logischen Gebrauch streng durchzuführen. Die Frage, ob dieses oder jenes zweckmäßiger sei, möchte ich als weniger wichtig bei Seite lassen. Man wird sich leicht über die Ausdrucksweise verständigen, wenn man einmal anerkannt hat, dass etwas da ist, was eine besondere Benennung verdient (Frege 2021c, S. 126).

---

<sup>1</sup> Die eckigen Klammern um „bestimmter“ markieren eine Texteingriff des Herausgebers. Er hat damit das Wort „bestimmtes“ im Originaltext ersetzt.

Der Begriff – wie ich das Wort verstehe – ist prädicativ [Fußnote. Er ist nämlich Bedeutung eines grammatischen Prädicats.]. Ein Gegenstandsname hingegen, ein Eigenname ist durchaus unfähig, als grammatisches Prädicat gebraucht zu werden (Frege 2021c, S. 127).

Es kann ja nicht verkannt werden, dass hier eine freilich unvermeidbare sprachliche Härte vorliegt, wenn wir behaupten: der Begriff *P f e r d* ist kein Begriff [Fußnote: Aehnliches kommt vor, wenn wir mit Beziehung auf den Satz „diese Rose ist roth“ sagen: das grammatische Prädicat „ist roth“ gehört zum Subjecte „diese Rose“. Hier sind die Worte „das grammatische Prädicat „ist roth““ nicht grammatisches Prädicat, sondern Subject. Gerade dadurch, dass wir es ausdrücklich Prädicat nennen, rauben wir ihm diese Eigenschaft.], während doch z. B. die Stadt Berlin eine Stadt und der Vulkan Vesuv ein Vulkan ist. Die Sprache befindet sich hier in einer Zwangslage, welche die Abweichung vom Gewöhnlichen rechtfertigt. Dass unser Fall ein besonderer ist, deutet Kerry selbst durch die Anführungszeichen beim Worte „Pferd“ an – ich gebrauche zu demselben Zwecke gesperrte Schrift –. Es lag kein Grund vor, die Wörter „Berlin“ und „Vesuv“ in ähnlicher Weise auszuzeichnen. Man hat bei logischen Untersuchungen nicht selten das Bedürfniss, etwas von einem Begriffe auszusagen und dies auch in die gewöhnliche Form für solche Aussagen zu kleiden, dass nämlich die Aussage Inhalt des grammatischen Prädicats wird. Danach würde man als Bedeutung des grammatischen Subjects den Begriff erwarten; aber dieser kann wegen seiner prädicativen Natur nicht ohne Weiteres so erscheinen, sondern muss erst in einen Gegenstand verwandelt werden, oder, genauer gesprochen, er muss durch einen Gegenstand vertreten werden, den wir mittels der vorgesetzten Worte „der Begriff“ bezeichnen, z. B. „der Begriff *M e n s c h* ist nicht leer“.

Hier sind die ersten drei Worte als Eigenname [Fußnote: Eigennamen nenne ich jedes Zeichen für einen Gegenstand] aufzufassen, der ebenso wenig prädicativ gebraucht werden kann wie etwa „Berlin“ oder „Vesuv“. Wenn wir sagen: „Jesus fällt unter den Begriff *M e n s c h*“, so ist das Prädicat (von der Copula abgesehen) „fallend unter den Begriff *M e n s c h*“, und bedeutet dasselbe wie „ein Mensch“. Von diesem Prädicate ist aber die Wortverbindung „der Begriff *M e n s c h*“ nur ein Theil.

Man könnte gegen die prädicative Natur des Begriffes geltend machen, dass doch von einem Subjects begriffe gesprochen werde. Aber auch in solchen Fällen, wie z. B. in dem Satze „alle Säugethiere haben rothes Blut“ ist die prädicative Natur des Begriffes nicht zu verkennen; denn man kann dafür sagen: „was Säugethier ist, hat rothes Blut“, oder „wenn etwas ein Säugethier ist, so hat es rothes Blut“ (Frege 2021c, S. 129–130).

Was hier an einem Beispiele gezeigt ist, gilt allgemein: der Begriff verhält sich wesentlich prädicativ auch da, wo etwas von ihm ausgesagt wird; folglich kann er dort nur wieder durch einen Begriff, niemals durch einen Gegenstand ersetzt werden. Die Aussage also, welche von einem Begriffe gemacht wird, passt gar nicht auf einen Gegenstand. Die Begriffe zweiter Stufe, unter welche Begriffe fallen, sind wesentlich verschieden von den Begriffen erster Stufe, unter welche Gegenstände fallen. Die Beziehung eines Gegenstandes zu einem Begriffe erster Stufe, unter den er fällt, ist verschieden von der allerdings ähnlichen eines Begriffes erster Stufe zu einem Begriffe zweiter Stufe. Man könnte vielleicht, um dem Unterschiede zugleich mit der Aehnlichkeit gerecht zu werden, sagen, ein Gegenstand falle *u n t e r* einen Begriff erster Stufe, und ein Begriff falle *i n* einen Begriff zweiter Stufe. Der Unterschied von Begriff und Gegenstand bleibt also in ganzer Schroffheit bestehen (Frege 2021c, S. 133).

### **Gedanken:**

- Frege will den Begriff „Begriff“ in rein logischem Sinne verwenden, ohne dass er klar artikuliert, was er genau damit meint.
- Ein Grundgedanke von ihm, der seine Texte durchzieht, ist die Unterscheidung zwischen den Termini „Begriff“ und „Gegenstand“ wie er sie versteht. Mit der Formulierung „ein Gegenstand fällt unter einen Begriff“ drückt er aus, dass der Gegenstand zum Umfang des Begriffs gehört. In

diesem Sinne kann auch kein Begriff unter einen anderen fallen, sondern nur untergeordnet sein. Damit will er unterscheiden zwischen der Element- und Teilmengenrelation.

- Die Fregesche Logik baut auf der naiven Mengenlehre auf. Die Unterscheidung zwischen Menge, Element und Teilmenge ist für ihn von zentraler Bedeutung.
- Frege ist der Ansicht, dass ein Begriff nur prädikativ und nicht als Subjekt verwendet werden kann. Für diese Verwendung bringt er keine überzeugenden Argumente, sondern weist nur nach, dass man eine Verwendung als Subjekt auch in prädikative Form ausdrücken kann. Wenn man einen Begriff als Subjekt verwenden will, muss nach Freges Auffassung davor das Wort „der Begriff“ gesetzt werden.
- Das fast krampfhaft Bemühen Freges zur konsequenten formalen Unterscheidung zwischen Begriff und Gegenstand, Subjekt und Prädikat führt zu umständlichen, kaum verständlichen sprachlichen Formulierungen.
- Die Kennzeichnung eines Begriffs im laufenden Text in seiner Verwendung als Begriff durch Einsetzen von Anführungsstrichen oder auch gesperrte Schrift halte ich für sinnvoll.
- Mit diesen Auffassungen von Frege wäre es nicht möglich, eine Begriffsdefinition in der Form *Definiendum* gleich *Definiens* zu formulieren.

### Eigenschaft und Merkmal

Frege hat sich in zwei Schriften ( Frege 1884, 2021c) explizit zu seinen Auffassungen zu den Begriffen Eigenschaft und Merkmal geäußert. Diese Auffassungen werden vollständig zitiert.

#### **§ 46. Die Zahlangabe enthält eine Aussage von einem Begriffe. Einwand, dass bei unverändertem Begriffe die Zahl sich ändere**

Man mag einwenden, dass ein Begriff wie z. B. „Angehöriger des deutschen Reiches,“ obwohl seine Merkmale unverändert bleiben, eine von Jahr zu Jahr wechselnde Eigenschaft haben würde, wenn die Zahlangabe eine solche von ihm aussagte. Man kann dagegen geltend machen, dass auch Gegenstände ihre Eigenschaften ändern, was nicht verhindere, sie als dieselben anzuerkennen (Frege 1884, S. 59).

#### **§ 53. Unterschied zwischen Merkmalen und Eigenschaften eines Begriffes. Existenz und Zahl**

Unter Eigenschaften, die von einem Begriffe ausgesagt werden, verstehe ich natürlich nicht die Merkmale, die den Begriff zusammensetzen. Diese sind Eigenschaften der Dinge, die unter den Begriff fallen, nicht des Begriffes. So ist „rechtwinklig“ nicht eine Eigenschaft des Begriffes „rechtwinkliges Dreieck“; aber der Satz, dass es kein rechtwinkliges, geradliniges, gleichseitiges Dreieck gebe, spricht eine Eigenschaft des Begriffes „rechtwinkliges, geradliniges, gleichseitiges Dreieck“ aus; diesem wird die Nullzahl beigelegt (Frege 1884, S. 64).

Hiermit hängt zusammen, was ich im § 53 meiner Grundlagen über meine Gebrauchsweise der Wörter „Eigenschaft“ und „Merkmal“ gesagt habe. Kerry's Ausführungen veranlassen mich, noch einmal darauf zurückzukommen. Jene Wörter dienen zur Bezeichnung von Beziehungen in Sätzen wie „ $\Phi$  ist Eigenschaft von  $\Gamma$ “ und „ $\Phi$  ist Merkmal von  $\Omega$ “. Nach meiner Redeweise kann etwas zugleich Eigenschaft und Merkmal sein, aber nicht von demselben. Ich nenne die Begriffe, unter die ein Gegenstand fällt, seine Eigenschaften, sodass „ $\Phi$  zu sein ist eine Eigenschaft von  $\Gamma$ “ nur eine andere Wendung ist für „ $\Gamma$  fällt unter den Begriff des  $\Phi$ “. Wenn der Gegenstand  $\Gamma$  die Eigenschaften  $\Phi$ ,  $X$  und  $\Psi$  hat, so kann ich diese in  $\Omega$  zusammenfassen, so dass es dasselbe ist, ob ich sage,  $\Gamma$  habe die Eigenschaft  $\Omega$ , oder ob ich sage,  $\Gamma$  habe die Eigenschaften  $\Phi$  und  $X$  und  $\Psi$ . Ich nenne dann  $\Phi$ ,  $X$  und  $\Psi$  Merkmale des Begriffes  $\Omega$  und zugleich Eigenschaften von  $\Gamma$ . Es ist klar, dass die Beziehung von  $\Phi$  zu  $\Gamma$  ganz verschieden ist von der zu  $\Omega$ , und dass darum eine verschiedene Benennung geboten ist.  $\Gamma$  fällt unter den Begriff  $\Phi$ ; aber  $\Omega$ , das selber ein Begriff ist, kann nicht unter den Begriff erster Stufe  $\Phi$  fallen, sondern könnte nur zu einem Begriffe zweiter Stufe in einer ähnlichen Beziehung stehen. Dagegen ist  $\Omega$  dem  $\Phi$  untergeordnet (Frege 2021c, S. 133).

Betrachten wir hierzu ein Beispiel! Statt zu sagen:

„2 ist eine positive Zahl“ und

„2 ist eine ganze Zahl“ und

„2 ist kleiner als 10“

können wir auch sagen „2 ist eine positive ganze Zahl kleiner als 10“.

Hier erscheinen

e i n e p o s i t i v e Z a h l z u s e i n ,

e i n e g a n z e Z a h l z u s e i n ,

k l e i n e r a l s 1 0 z u s e i n

als Eigenschaften des Gegenstandes 2, zugleich aber als Merkmale des Begriffes

p o s i t i v e g a n z e Z a h l k l e i n e r a l s 1 0 .

Dieser ist weder positiv, noch eine ganze Zahl, noch kleiner als 10. Er ist zwar untergeordnet dem Begriffe *g a n z e Z a h l*, aber er fällt nicht unter ihn (Frege 2021c, S. 134).

Eine Analyse der Verwendung der Wörter „Eigenschaft“ und „Merkmal“ in den sonstigen Teilen seiner Schriften führte zu folgenden Ergebnissen.

- Das Wort „Eigenschaft“ bezieht sich immer auf ein Einzelnes, z. B.
  - „ein Urtheil von allgemeinem Inhalt“ (Frege 1879, S. 4)
  - „die Eigenschaft Mensch zu sein“ (Frege 1879, S. 58)
  - „die Eigenschaft F“, „Es sei beispielsweise F die Eigenschaft, ein Haufe Bohnen zu sein“ (Frege 1879, S. 58 ff, 64)
  - „Eigenschaften wie Assoziativität und Kommutativität“ (Frege 1884, S. 109)
- Das Wort „Merkmal“ verwendet er sehr selten, z. B.
  - „Verneinung als ein Merkmal eines beurtheilbaren Inhalts“ (Frege 1879, S. 4)
  - „Merkmal des Fliegens“ (Dialog mit Pünjer über Existenz, In: Frege 2021a, S. 71)

#### **Gedanken:**

- Zum Verständnis dieser auf den ersten Blick verworrenen Ausführungen von Frege zu den Wörtern „Eigenschaft“ und „Merkmal“ müssen seine Auffassungen zu den Wörtern „Begriff“, „Gegenstand“, „fällt unter“ und „ist untergeordnet“ herangezogen werden. Die Relation „fällt unter“ verwendet Frege für „x ist Element der Menge  $\Omega$ “ und die Relation „ist untergeordnet“ für „die Menge  $\Phi$  ist Teilmenge der Menge  $\Omega$ “. Weiterhin ist seine Schreibweise von Begriffen in gesperrter Schrift zu beachten.
- Nach Frege ist sowohl eine Eigenschaft als auch ein Merkmal ein Begriff in seinem Sinne. Eine Eigenschaft bezieht sich auf einen Gegenstand und ein Merkmal auf einen Begriff. Der Gegenstand fällt unter seine Eigenschaft, d. h. er ist Element der Menge, die dem Begriff bildet. Die Eigenschaft der Zahl 2, dass sie eine positive Zahl ist, bedeutet danach, dass die Zahl 2 ein Element der Menge aller positiven Zahlen ist. Als Bezeichnung für diese Menge verwendet Frege den Begriff *e i n e p o s i t i v e Z a h l z u s e i n*. Die gesperrte Schrift wirkt in diesem Fall seltsam, da Frege die einzelnen Wörter nicht voneinander abhebt.
- Eine Eigenschaft kann nach Freges konsequenter mengentheoretischer Betrachtung nicht Eigenschaft eines Begriffs sein, weil der Begriff dann unter einen Begriff, der Eigenschaft, fallen würde und die Relation „fällt unter“ nur zwischen Element und Menge besteht. Der Begriff *p o s i t i v e g a n z e Z a h l k l e i n e r a l s 1 0* ist kein Element, sondern eine Teilmenge des Begriffs *e i n e p o s i t i v e Z a h l z u s e i n*. Deshalb kann man im Fregeschen Sinne auch nicht sagen, dass der Begriff die Eigenschaft hat, positiv zu sein.
- Die Erklärungen und Sprechweisen von Frege zu „Eigenschaft“ und „Merkmal“ beruhen also letztlich auf mengentheoretischen Überlegungen. Es ist fraglich, welchen Mehrwert in Bezug auf die übliche Sprechweise sie eigentlich ergeben. Wenn man sagt, die 2 ist eine positive Zahl, so ist implizit klar, dass die Zahl 2 zu Menge der positiven Zahlen gehört. Wenn ich die Menge aller

positiven ganzen Zahlen, die kleiner als zehn sind, bildet, ist unmittelbar klar, dass alle diese Zahlen die Eigenschaft haben positiv zu sein. Diese Eigenschaft ihre Elemente als ein Merkmal des Begriffs „positive ganze Zahl kleiner als 10“ also der Menge {1; 2; 3; 4; ...; 9}, die nach Frege dem Begriff entspricht, zu bezeichnen, ist eher ungewöhnlich und auch nicht erforderlich.

- Es ist auch nicht erkennbar, weshalb Frege zu Erklärung seines Begriffs „Merkmal einer Menge“ eine Menge gewählt hat, die Durchschnitt mehrerer Mengen ist also mehrere Merkmale besitzt. Er könnte genauso gut auch vom Merkmal der Menge der positiven Zahlen sprechen, das darin besteht, dass alle ihre Elemente die Eigenschaft haben positiv zu sein.
- Generell kann man sagen, dass nach Frege das Merkmal einer Menge eine Eigenschaft ist, die allen Elementen dieser Menge zukommt. Der Unterschied zwischen den Begriffen „Merkmal“ und „Eigenschaft“ ist also eigentlich marginal und besteht nur in dem Bezug der Begriffe auf ein Element oder eine Menge.
- Während es bei mathematischen Objekten noch relativ einfach ist, von einer formulierten Eigenschaft auf die Menge zu schließen, deren Elemente diese Eigenschaft haben, ist dies bei nicht mathematischen Objekten etwas schwieriger. So führt die Eigenschaft, dass ein Blatt grün ist auf die Menge aller grünen Objekte und die Eigenschaft, dass ein Körper die Masse 1 kg hat auf die Menge aller Körper, die diese Masse haben.
- Man kann aber feststellen, dass Frege den Begriff „Eigenschaft“ in der Weise eingeschränkt hat, indem er ihn immer an ein konkretes Objekt bindet, das selbst keine Menge ist. Der Begriff „Merkmal“ bezieht sich bei ihm nicht auf ein einzelnes Objekt, sondern auf eine Menge von Objekten.

### Zusammenfassende Bemerkungen

Frege verwendet alle analysierten Begriffe in einer speziellen Weise, die sich von ihrer in der Philosophie und anderen Wissenschaften üblichen Verwendung teilweise grundlegend unterscheidet, sodass zum Beispiel Kutschera sich veranlasst sieht, die von Frege verwendete Bedeutung durch ein tiefer gestelltes „F“ an dem Wort „Bedeutung“ zu kennzeichnen. Es bleibt jedem Autor unbenommen, Wörter im eigenen Sinn zu verwenden. Dann sollte er aber auch die Konsequenz aufbringen, durch entsprechende Zusätze (Adjektive oder „im Sinne von“) diese spezielle Bedeutung der Wörter kenntlich zu machen, was Frege durchaus auch an mehreren Stellen in Auseinandersetzung mit anderen Auffassungen praktiziert. Ich halte es aber nicht für sinnvoll, wenn in der Philosophie zu solchen zentralen und allgemein verwendeten Begriffen wie Bedeutung, Gegenstand, Sinn und Begriff derart unterschiedliche Begriffsbestimmungen auftreten.

Seine Bemühungen zur sprachlichen Exaktheit beruhen wesentlich auf mengentheoretischen Überlegungen. Es ist sicher richtig, zwischen einer Menge und einem ihrer Elemente oder Teilmengen zu unterscheiden. Die konsequente Befolgung dieser mengentheoretischen Orientierung durch Frege führt dann aber auch zu sprachlichen Ungetümen. Es ergibt sich die Frage, ob sich wirklich durch dieses Bestreben ein Mehrwert für philosophische Erkenntnisse ergibt. Das steht allein schon deshalb infrage, weil die Begriffe wie Gegenstand und Begriff, an denen Frege sein Vorgehen zelebriert, von ihm in einer sehr eingeschränkten formalen Weise verstanden werden. Er klammert dabei gerade für philosophische Betrachtungen wesentliche Momente dieser Begriffe aus.

Frege hat ohne Frage einen bedeutenden Beitrag zur Entwicklung der modernen Logik geleistet. So schätzt Kutschera ein, dass es nicht übertrieben ist, „wenn man ihn oft als den bedeutendsten Logiker nach Aristoteles bezeichnet“ (Kutschera 1989, S. 1). Die enge Bindung seines logischen Systems an die damalige Mengenlehre hatte nach Entdeckung der Russellschen Antinomie tragische Konsequenzen für die wissenschaftlichen Arbeiten und das persönliche Leben von Frege. Er musste zugeben, dass mit der von Russell angegebenen Konstruktion einer Menge eine Grundlage seines logischen Systems verloren ging. Er war dann persönlich auch nicht mehr in der Lage, sich an den daraufhin begonnenen Entwicklungen in der Mengenlehre wie der Typentheorie von Russell beteiligen.

Ausgelöst durch Arbeiten von Carnap und Wittgenstein, die einige Vorlesungen von Frege gehört hatten, wurden seine semantischen Überlegungen als Grundlage für die Entwicklung einer analytischen Sprachphilosophie gewählt. So heißt es etwa in der Internet Enzyklopädie Wikipedia: „Im Bereich der Philosophie waren seine sprachphilosophischen Betrachtungen außerordentlich einflussreich. So unterschied er etwa zwischen der Bedeutung und dem Sinn eines Wortes. Unmittelbar beeinflusst hat er u. a. Rudolf Carnap, der bei ihm studierte, Bertrand Russell und Ludwig Wittgenstein. Frege gilt als einer der hauptsächlichen Wegbereiter der analytischen Philosophie, einer der wichtigsten Strömungen der Philosophie des 20. Jahrhunderts“ ([https://de.wikipedia.org/wiki/Gottlob\\_Frege](https://de.wikipedia.org/wiki/Gottlob_Frege)). Es ist mir nach den obigen Analysen seiner Auffassungen zu einigen Begriffen unverständlich, warum seine Arbeiten so einen großen Einfluss auf Entwicklungen in der Philosophie hatten und immer noch haben. So kommt im Personenverzeichnis des ausführlichen Kommentars von Stekeler zur *Wissenschaft der Logik* von Hegel, Bd. 1, (Stekeler 2020) Frege 51-mal vor und gehört damit neben Leibniz (53), Platon (71) und Kant (90) zu den am häufigsten genannten Autoren, während etwa Aristoteles gar nicht auftritt (vgl. <https://philosophie-neu.de/zitate-und-gedanken-zu-pirmin-stekeler-2020-hegels-wissenschaft-der-logik-band-1/>). In dem ausführlichen Kommentar von Brandom zur *Phänomenologie des Geistes* (Brandom 2021 [Original 2019]) wird Frege mit 40-mal am häufigsten im Namensregister aufgeführt. Danach kommen erst Wittgenstein (31-mal) und Sellars (29-mal) (vgl. <https://philosophie-neu.de/zitate-und-gedanken-zu-brandom-2021-2/>).

Die Arbeiten von Frege sind für mich ein typisches Beispiel für die oft anzutreffende ungenügende Bewältigung des Verhältnisses von formalen und nichtformalen Momenten von Begriffen im Denken und Wirken von Mathematikern. Dies betrifft auch mathematische Begriffe und hat erhebliche Auswirkungen auf die Qualität der mathematischen Lehre. Ich habe dies am Beispiel der Begriffe Variable und Wahrscheinlichkeit in (Sill 2022) ausführlich dargestellt (vgl. <https://philosophie-neu.de/die-spekulative-mathode-von-hegel-und-das-lernen-von-mathematik/>).

Unter formalen Momenten eines Begriffs verstehe ich das Begriffswort, die Definition des Begriffs, falls möglich bzw. Erklärungen auf einer theoretischen Ebene oder die Angabe dessen, was mit dem Begriff bezeichnet wird. Die formalen Momente sind Hauptinhalt vieler mathematischer Fachbücher, die im Wesentlichen aus Definitionen, Sätzen und Beweisen bestehen. Auch philosophische Werke bewegen sich teilweise fast ausschließlich auf der Ebene des Operierens mit allgemeinen Begriffen.

Zu der großen Palette der nichtformalen Momente eines Begriffs gehört bereits das Angeben von Beispielen und Gegenbeispielen, was ich in vielen philosophischen Texten vermisste. Eine herausragende Ausnahme sind die Arbeiten von Aristoteles. Zu den nichtformalen Momenten gehören weiterhin anschauliche Vorstellungen, Bezüge zu anderen Begriffen, insbesondere zu Gegenbegriffen, Anwendungsmöglichkeiten und Einstellungen zur Sinnhaftigkeit des Begriffs.

Nichtformale Momente lassen sich nicht formalisieren. Es ist ein Zeichen falsch verstandener Wissenschaftlichkeit, wenn man die Lehre eines Faches auf die formalen Momente der Begriffe beschränkt. Sowohl in der Wissenschaft als auch in der Lehre sollte jeder Begriff als ein reichhaltiges Ensemble von formalen und nichtformalen Momenten aufgefasst werden. Meine Erfahrung aus dem Studium von mathematischen Fachbüchern und aus Gesprächen mit Mathematikkollegen haben mir leider gezeigt, dass sie oft nicht bereit und auch nicht in der Lage sind, nichtformale Momente eines mathematischen Begriffs zu thematisieren. Hauptsächliche Ursache ist aus meiner Sicht das manifeste Denkgebäude eines Fachmathematikers als Ergebnis seiner eigenen Erfahrungen und des vorrangig analytischen Denkens auf theoretischer Ebene. Das hat erhebliche Auswirkungen auf die mathematische Lehre an Universitäten und Hochschulen. Die Meisterung des Verhältnisses und insbesondere der Übergänge zwischen formalen und nichtformalen Momenten der Begriffe ist aus meiner Sicht das wesentliche Merkmal eines erfolgreichen Mathematikunterrichts bzw. einer mathematischen Lehre.

## Literaturverzeichnis

Brandom, Robert (2021 [Original 2019]): Im Geiste des Vertrauens. Eine Lektüre der "Phänomenologie des Geistes". Berlin: Suhrkamp.

Frege, Gottlob (1879): Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle an der Saale: Louis Nebert.

Frege, Gottlob (1884): Grundlagen der Arithmetik. Eine logische mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl von Dr. G. Frege, a. o. Professor an der Universität Jena. Breslau: Verlag von Wilhelm Koebner.

Frege, Gottlob (1993): Der Gedanke • Eine logische Untersuchung. In: Gottlob Frege: Logische Untersuchungen. Herausgegeben und eingeleitet von Günther Patzig. 4., durchges. und bibliogr. erg. Aufl. Hg. v. Gottlob Frege. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht (Kleine Vandenhoeck-Reihe, 1219), S. 30–53.

Frege, Gottlob (2021a): Ausgewählte Schriften zur Philosophie der Logik und der Sprache. Herausgegeben von Dolf Rami. 1st ed. Hg. v. Dolf Rami. Stuttgart: UTB GmbH (UTB, 5590). Online verfügbar unter <https://elibrary.utb.de/doi/book/10.36198/9783838555904>.

Frege, Gottlob (2021b): Über Sinn und Bedeutung. In: Gottlob Frege: Ausgewählte Schriften zur Philosophie der Logik und der Sprache. Herausgegeben von Dolf Rami. 1st ed. Hg. v. Dolf Rami. Stuttgart: UTB GmbH (UTB, 5590), S. 107–125.

Frege, Gottlob (2021c): Ueber Begriff und Gegenstand. In: Gottlob Frege: Ausgewählte Schriften zur Philosophie der Logik und der Sprache. Herausgegeben von Dolf Rami. 1st ed. Hg. v. Dolf Rami. Stuttgart: UTB GmbH (UTB, 5590), S. 126–137.

Kutschera, Franz von (1989): Gottlob Frege. Eine Einführung in sein Werk. Berlin: DE GRUYTER (De-Gruyter-Studienbuch).

Sill, Hans-Dieter (2022): Die spekulative Methode von Hegel und das Lernen von Mathematik. Allgemeines und Einzelnes am Beispiel des Variablen- und des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. In: *Leibniz Online - Zeitschrift der Leibniz-Sozietät der Wissenschaften zu Berlin e. V.* (45). Online verfügbar unter [https://leibnizsozietat.de/wp-content/uploads/2022/05/01\\_Leibniz-Online-Nr.-45-2022.pdf](https://leibnizsozietat.de/wp-content/uploads/2022/05/01_Leibniz-Online-Nr.-45-2022.pdf), zuletzt geprüft am 15.05.2022.

Stekeler, Pirmin (2020): Hegels Wissenschaft der Logik. Ein dialogischer Kommentar. Band 1: Die objektive Logik, Die Lehre vom Sein, Qualitative Kontraste, Mengen und Maße. Hamburg: Felix Meiner Verlag (Philosophische Bibliothek, Band 690).