Der Begriff Zufall[1]

1. Bedeutungen der Wörter „Zufall“ und „zufällig“

Sowohl in der Umgangssprache als auch in den Naturwissenschaften, der Mathematik und der Philosophie besitzt der Zufallsbegriff eine große Anzahl von möglichen Interpretationen und Bedeutungen, die sich sogar teilweise widersprechen. Es ist deshalb nicht möglich und auch nicht sinnvoll die Bedeutungen des Zufallsbegriffs auf wenige Aspekte zu beschränken. Alle im Folgenden dargestellten Auffassungen haben in bestimmten Kontexten ihre Berechtigung und können deshalb nicht als richtig oder falsch bezeichnet werden. Analysen und Ergebnisse empirischer Untersuchungen zum Zufallsbegriff bei Kindern und Jugendlichen findet man u. a. bei Piaget (1975), Sill (1993), Amir et al. (1999), Döhrmann (2004, 2005), Herget et al. (2005) und Batanero et al. (Batanero et al. 2005).

Es zeigt sich immer wieder, dass jeder Mensch abhängig von seinen persönlichen Erfahrungen, seinen Kenntnissen, seiner Weltanschauung oder seinem wissenschaftlichen Arbeitsgebiet bestimmte eigene Vorstellungen von dem hat, was er als Zufall bezeichnet. Die Frage kann deshalb immer nur lauten, ob der jeweils betrachtete Aspekt des Zufallsbegriffs in einem konkreten Kontext nützlich oder eher problematisch ist. So kann etwa einem Menschen, der einen schweren Schicksalsschlag erlitten hat, der Glaube an die Vorherbestimmung allen Geschehens und damit die Ablehnung jeglichen Zufalls durchaus helfen, mit der aktuellen Situation besser zurecht zu kommen.

Im Folgenden werden verschiedenen Bedeutungen der Worte „Zufall“ bzw. „zufällig“ als adverbiale Bestimmung zusammengestellt. In stochastischen Situationen treten oft mehrere Bedeutungen gleichzeitig auf. Wir diskutieren sie aber zunächst einzeln und gehen auf Bezüge zu anderen Bedeutungen in der Regel nicht ein. Die Bedeutungsaspekte werden jeweils durch Beispiele illustriert, die teilweise aus Befragungen von Schülern und Studenten stammen. In empirischen Untersuchungen zeigt sich immer wieder, dass die Grundvorstellungen zum Zufallsbegriff in allen Altersgruppen sehr ähnlich sind.

1.1. Zufall und irreversible Durchmischungen

Als einer der ersten hat sich Piaget auf der Basis empirischer Untersuchungen mit der Entwicklung des Zufallsbegriffs beim Kinde beschäftigt. Seine Forschungen haben großen Einfluss auf nachfolgende Arbeiten. Piaget (1975) stellt seine Betrachtungen zum Zufall in engen Zusammenhang mit irreversiblen Vorgängen. Der Prototyp des Irreversiblen in der Natur und damit des Zufälligen ist für ihn die Durchmischung materieller Elemente wie etwa die Vermischung zweier Gase, die Umwandlung von Energie in Wärme oder auch die Vermischung von roten und weißen Kugeln in einem Behälter. Um die Fähigkeiten von Kindern zur Erfassung von Durchmischungen zu untersuchen, hat Piaget Versuche durchgeführt, bei denen die Kinder die Durchmischung von 8 weißen und 8 roten Perlen, die zu Beginn getrennt waren, beim Kippen einer Schale vorhersagen sollten. Eine ausführliche Beschreibung des Versuchs findet man bei Kütting (1994, S. 87). Piaget stellte fest, dass bei seinen Untersuchungen erst Kinder im Alter von 7–8 Jahren in der Lage waren die Durchmischung vorherzusehen.

Piaget stellt weiterhin einen engen Zusammenhang des Zufallsbegriffs und des Wahrscheinlichkeitsbegriffs her. Das Erkennen von irreversiblen Durchmischungen ist Voraussetzung für Wahrscheinlichkeitsaussagen etwa beim Ziehen von Perlen aus Säckchen mit unterschiedlicher Zusammensetzung (Piaget 1975, S. 167). Auch hier müssen die Kinder erkennen, dass die Durchmischung der Perlen dazu führt, dass die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Farbe sich nach den quantitativen Verhältnissen in dem Säckchen richtet. Dieser Gedanke von Piaget hat uns zu den Vorschlägen für Experimente zur Durchmischung angeregt.

[1] Auszug aus Sill und Kurtzmann 2019, S. 206–221.

1.2. Zufall und Determiniertheit, Kausalität sowie Schicksal

Die Frage, ob alles in der Welt vorherbestimmt ist oder auch der Zufall eine Rolle spielt, hat Menschen schon seit Jahrhunderten beschäftigt. Die Mathematiker Blaise Pascal (1623-1666), Jakob Bernoulli (1655–1705) und Pierre-Simon Laplace (1749-1827), die wesentliche Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung geschaffen haben, vertraten die Ansicht, dass der Zufall nur Ausdruck unserer Unkenntnis ist und sich alles, was in Zukunft passiert, genau berechnen ließe. So schreibt Bernoulli: „Ganz gewiß ist es, daß ein Würfel bei gegebener Lage, Geschwindigkeit und Entfernung vom Würfelbrette, von dem Augenblick an, in welchem er die Hand verlässt, nicht anders fallen kann, als er tatsächlich auch fällt." (1899, S. 73) Auf Laplace geht der Begriff „Laplace'scher Dämon" zurück, der mit folgendem Zitat im Zusammenhang steht: „Wir müssen … den gegenwärtigen Zustand des Weltalls als die Wirkung seines früheren Zustandes und andererseits als die Ursache dessen, der Folgen wird, betrachten. Eine Intelligenz, welche für einen gegebenen Augenblick alle Kräfte, von denen die Natur belebt ist, sowie die gegenseitige Lage der Wesen, die sie zusammensetzen, kennen würde, und überdies umfassend genug wäre, um diese gegebenen Größen einer Analyse zu unterwerfen, würde in derselben Formel die Bewegungen der größten Weltkörper wie die des leichtesten Atoms ausdrücken: Nichts würde für sie ungewiss sein und Zukunft wie Vergangenheit ihr offen vor Augen liegen." (1996, S. 4). Diese Auffassungen werden heute als strenger Determinismus bezeichnet. Es gibt durchaus Schüler und Jugendliche, die eben solche Ansichten haben (Döhrmann 2004; 2005). Heute weiß man, dass es aus physikalischer Sicht auch theoretisch unmöglich ist, Ort und Zeit eines Teilchens genau vorherzubestimmen. Umgekehrt gibt es deterministisch bestimmte Systeme, die ein völlig regelloses, chaotisches Verhalten zeigen. Ihre Untersuchung ist unter anderem Gegenstand der Chaostheorie, deren Symbol das berühmte Apfelmännchen ist.

Im Unterschied zur Frage nach der Vorherbestimmbarkeit von zukünftigen Ereignissen beziehen sich Überlegungen zur Kausalität auf die Frage nach der Existenz von realen Ursachen für ein eingetretenes Ereignis. Erkennt man das allgemeine Kausalitätsprinzip an, so hat jedes Ereignis eine Ursache. Auf dieser Grundlage und einer Betrachtung von Ursache-Wirkungs-Ketten definiert Antoine-Augustin Cournot (1801–1877) den Zufall in folgender Weise: „Die Erscheinungen aber, welche durch ein Zusammentreffen oder durch eine Vereinigung mehrerer hinsichtlich der Kausalität voneinander unabhängige Erscheinungen hervorgebracht werden, nennt man zufällige Erscheinungen oder Wirkungen des Zufalls" (1849, S. 63). Eine Auffassung, der sich auch Piaget anschließt und von einer „Inferenz der Kausalreihen" spricht (1975, S. 163).

Diesen Auffassungen entspricht die umgangssprachliche Formulierung, den Zufall als Schnittpunkt zweier Notwendigkeiten zu bezeichnen. Etwas Zufälliges ist danach stets kausal bestimmt. Es gibt also durchaus konkrete Ursachen für die Endlage einer Münze, die sich aus den konkreten Ausprägungen der Bedingungen ergeben, die Einfluss auf den Wurf haben. Aber, selbst wenn es rein technisch möglich wäre, nach dem Abwurf einer Münze alle physikalischen Eigenschaften zu bestimmen und noch vor dem Auftreffen auf den Tisch die Endlage zu berechnen, würde dies nichts an dem stochastischen Charakter der Situation ändern. Beim nächsten Wurf der Münze haben die physikalischen Eigenschaften wieder ganz andere Werte. Der stochastische Charakter würde sich nur ändern, wenn es gelänge eine Maschine zu konstruieren, die die Münze immer genau unter den gleichen physikalischen Bedingungen wirft.

Diese Gedankengänge führen letztlich zu dem komplementären Verhältnis von Zufall und Notwendigkeit, das Gegenstand philosophischer Betrachtungen ist.

Die Auffassungen zum Zufall werden beeinflusst durch den Glauben an ein vorher bestimmtes Schicksal und damit verbundene besondere Fähigkeiten eines Menschen in stochastischen Situationen. Dabei spielen die Art der Religion und der Grad ihrer Ausprägung eine wichtige Rolle, wie Amir und Williams (1999) in ihren Befragungen von Kindern im Alter von 11–12 Jahren festgestellt haben. Sie ermittelten einen hohen Grad an abergläubischen Vorstellungen. Insgesamt glauben 72 % der befragten Schüler, dass einige Menschen in Glücksspielen erfolgreicher sind als andere.

In einigen Publikationen werden die Begriffe Schicksal, Zufall und Kausalität bzw. freier Wille eines Menschen nebeneinandergestellt (Amir und Williams 1999; Zawojewski et al. 1989). Das Schicksal bzw. die Vorherbestimmtheit legen nach dieser Auffassung das Ergebnis eines stochastischen Vorgangs fest, ohne dass Naturgesetze oder der Mensch darauf Einfluss haben. Der Faktor Zufall hat dabei nichts mit dem Schicksal zu tun und unterliegt keinen kausalen Zusammenhängen bzw. dem freien Willen eines Menschen. Andere Autoren (Warwitz 2009) subsumieren das Schicksal unter den Begriff Zufall.

1.3. Zufall und Variabilität bei kausalen Zusammenhängen

Piaget sieht in der Entwicklung statistischer Methoden in den Naturwissenschaften, insbesondere in der Physik, die Berücksichtigung des Zufalls bei naturwissenschaftlichen Gesetzen. Neben der Erklärung etwa von Durchmischung als Interferenz von einzelnen Bewegungsvorgängen betrachtet er die Rolle des Zufalls auch bei der Anwendung von Modellen für reale Zusammenhänge. So hat nach seinen Worten etwa Newton bei der Entdeckung des Gravitationsgesetzes in vereinfachender Weise von der „unendlichen Komplikation aller wirklichen Bewegungen“ (S. 174) abgesehen, das heißt den Zufall aus seinen Überlegungen ausgeklammert.

Diesem Gedanken von Piaget entspricht die Auffassung, Zufall als „Rauschen im System“ anzusehen (Eichler und Vogel 2009), (Engel 2010). So beschreibt Engel (2010) die Beziehungen zwischen Daten und Modellen u. a. durch folgende Gleichungen (S. 222):

Daten = Muster + Abweichung

= Signal + Rauschen

= Struktur + Zufall

Eichler und Vogel (2009) übertragen diese Gedanken auch auf den Wahrscheinlichkeitsbegriff und geben dazu folgende Beziehung an (S. 168):

(objektive) Wahrscheinlichkeit = Muster + Rest

Moore (1990) nutzt dieses Zusammenspiel von Mustern und Variabilität zur Definition von zufälligen Phänomenen: „Phenomena having uncertain individual outcomes but a regular pattern of outcomes in many repetitions are called random.” (S. 98,).

Auf dieser theoretischen Grundlage basieren die Untersuchungen von Schnell (2014) mit Grundschulkindern zu einem Glücksspiel. Sie betrachtet den Zufall als eine zentrale Kategorie des Stochastikunterrichts in der Grundschule und bezieht sich dabei nur auf das Verhältnis von Muster und Variabilität, das aus mathematischer Sicht zum Gesetz der großen Zahl führt.

Die Auffassungen, den Zufall mit der Variabilität zu verbinden, betreffen das Problem der modellhaften Beschreibung realer Zusammenhänge durch Funktionen, dass Engel in seiner Monographie für Lehramtsstudierende „Anwendungsorientierte Mathematik: Von Daten zur Funktion“ (2010) ausführlich darstellt.

Diesen Aspekt des Zufallsbegriffs findet man weiterhin im Rahmen der Beurteilenden Statistik beim Konzept der „nicht signifikanten (zufälligen) Abweichung“. Grundideen dieses Konzeptes berühren auch den Stochastikunterricht in der Grundschule. Wenn eine Münze zwanzigmal geworfen wird, so kann man aus theoretischer Sicht erwarten, dass 10mal Kopf und 10mal Zahl erscheint. Von diesen zu erwartenden Werten weichen die Ergebnisse bei einer wiederholten Durchführung dieses Experimentes etwa im Rahmen einer Schulklasse mehr oder weniger stark ab. Diese Abweichungen können nur mit den Mitteln der beurteilenden Statistik quantifiziert und damit bewertet werden.

Es handelt sich aber nur um einen Aspekt des Zufallsbegriffs. Mit dem Aspekt der zufälligen Abweichung vom Erwarteten bzw. funktional Beschriebenen werden die Ursachen für die Abweichungen und damit die Bedingungen der betreffenden Vorgänge nicht weiter betrachtet und analysiert. Es muss weiterhin vorausgesetzt werden, dass der Vorgang oft unter gleichen

Bedingungen wiederholt werden kann. Einzelne Vorgänge bleiben damit außerhalb dieser Sichtweise. Eine weitere Einschränkung ist, dass man nur metrische Daten unter diesem Aspekt untersuchen kann. Ein entscheidender Nachteil besteht weiterhin darin, dass bei Vorgängen, bei denen keine funktionalen Modelle möglich sind, der Gedanke einer zufälligen Abweichung nicht sinnvoll ist.

1.4. Zufall und Grad der Erwartung

Das Wort „Zufall“ und damit eng verbunden die Wörter Glück oder Pech werden im Alltag immer dann verwendet, wenn etwas sehr Seltenes, also ein Ereignis mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit eingetreten ist.

- „Zufall ist, wenn man 100mal beim Schachspiel hintereinander gewinnt.“ „Zufall wäre, wenn ich morgen Millionär wäre.“ (Binner et al. 2012)
- Auf die Frage „Nenne ein Beispiel dafür, was zufällig passieren kann.“ erhielten Klunter und Raudis (2010) u. a. folgende Antworte: „Es kann eigentlich alles zufällig passieren, es kann mir auch heute noch ein Ziegelstein auf den Kopf fallen“
- Weitere Beispiele sind ein Hauptgewinn bei einem Glücksspiel, das Treffen von Personen, die man sehr lange nicht gesehen hat, ein Verkehrsunfall oder wenn zwei Menschen unabhängig voneinander das Gleiche tun.

Man spricht aber auch von Zufall, wenn der Grad der Erwartung zwar gering ist, es sich aber nicht um ein sehr seltenes Ereignis mit einer sehr kleinen Wahrscheinlichkeit handelt.

- „Zufall ist, wenn plötzlich die Ampel rot ist!“ (Binner et al. 2012)
- Wenn bei einem sportlichen Wettkampf ein Außenseiter gegen den Favoriten gewinnt, so sagt man, dass das Zufall war.
- Das Auftreten einer 6 beim Wurf eines Würfels wird als Zufall bezeichnet.

Ist der Grad der Erwartung recht groß, das heißt, dass das Ereignis mit großer Wahrscheinlichkeit erwartet werden kann, wird sein Eintreten dagegen nicht als zufällig bezeichnet.

- Wenn bei einem sportlichen Wettkampf der Favorit gegen den Außenseiter gewinnt so sagt man: „Das war zu erwarten.“ und „Es ist kein Zufall“.
- Schülern dritter Klassen wurde folgende Aufgabe gestellt (Wenau 1991).
  Kerstin und ihre Mutti haben sich nach der Arbeit um 16 Uhr vor dem Kaufhaus verabredet. Sie kommen Punkt 16 Uhr beide dort an. Kerstin begrüßt ihre Mutti: "Na, das ist ja ein Zufall, dass wir gleichzeitig hier sind." Stimmt das?
  8 von 15 Schülern sagten: Nein, das ist kein Zufall, sie waren ja verabredet.

1.5. Zufall und Vorhersehbarkeit

Zwischen den Bedeutungen von Zufall und Nichtvorhersehbarkeit gibt es meist enge Beziehungen. Teilweise wird die Nichtvorhersehbarkeit sogar zur Erklärung des Begriffes Zufall verwendet.

- In dem Schulbuch „Mathe live 6“ wird formuliert: „Immer wenn das Ergebnis einer Handlung nicht vorhergesagt werden kann, spricht man von einem Zufall“ (nach Döhrmann 2004, S. 33).
- Als nicht vorhersehbar und damit als zufällig werden Naturereignisse wie ein Vulkanausbruch, ein Blitzschlag, ein Regenbogen und auch Ergebnisse von Glücksspielen bezeichnet.
- Bei sportlichen Ereignissen wie etwa einem Fußballspiel werden unabsichtliche, unvorhersehbare Ergebnisse als zufällig bezeichnet. So haben Sportwissenschaftler der Uni Augsburg ermittelt, dass etwa 44 % der Tore im Fußball zufällig entstehen, da ein Ball abgefälscht, unkontrolliert von Pfosten zurücksprang oder unfreiwillig vom Gegner vorgelegt wurde.

Wenn ein Ereignis zwar nicht vorhersehbar ist, aber von Personen geplant beziehungsweise verursacht wurde, so wird es nicht als zufällig bezeichnet.

- Der Besuch von Tante Erna am Wochenende war nicht vorhersehbar. Es ist aber kein Zufall, dass Tante Erna kommt, denn sie wollte unbedingt die Familie wiedersehen.
- Ein Unfall ist auch für den Unfallverursacher in der Regel nicht vorhersehbar. Da der Unfallverursacher aber die Verkehrsregeln bewusst verletzt hat, wird der Unfall aus seiner Sicht nicht als Zufall bezeichnet.

1.6. Zufall und Rolle von beteiligten Personen

Wenn das Ergebnis eines Vorgangs eingetreten ist, an dem Personen beteiligt sind und diese das Ergebnis nicht beeinflusst haben oder beeinflussen können, so wird es als zufällig bezeichnet.

- In einen Autounfall verwickelt zu werden, ist aus der Sicht des Unschuldigen zufällig. S. A. Warwitz, ein Experte für die Verkehrserziehung von Kindern und Jugendlichen, stellt die Rolle des Zufalls im Zentrum seiner Vorschläge für verkehrserzieherische Maßnahmen (2009). Die Kinder sollen im Ergebnis seiner verkehrserzieherischen Maßnahmen erfahren, dass Unfälle äußerst selten Zufälle sind, sondern immer entstehen durch Zusammentreffen mehrerer Auslöser, als Schnittpunkt einer Reihe ungünstiger Umstände und Fehlverhaltensweisen. Zufall bedeutet für ihn, "dass das Schicksal sich willkürlich Opfer sucht, dass wir keinerlei Einfluss auf die Geschehnisse haben, dass niemanden eine Schuld trifft, dass wir den Ereignissen hilflos ausgeliefert sind.“ (S. 43)
- Wenn sich zwei Bekannte in der Stadt treffen, ohne sich vorher verabredet zu haben oder ohne zu wissen, dass der andere auch in der Stadt ist, so wird das Treffen als Zufall bezeichnet.

Wenn etwas eingetreten ist, woran Personen beteiligt sind, die das Ergebnis bewusst beeinflusst haben oder beeinflussen können, wird es nicht als zufällig bezeichnet.

- Wenn jemand einen Verkehrsunfall durch unvorsichtiges Verhalten verursacht hat, so wird dies aus Sicht des Verursachers nicht, aber aus Sicht des vom Unfall Betroffenen durchaus als Zufall bezeichnet. Ein und dasselbe Ereignis, ein Verkehrsunfall, wird also aus verschiedenen Sichten einmal als zufällig und einmal als nicht zufällig angesehen.
- Wenn ein guter Schüler sich auf eine Mathematikarbeit gründlich vorbereitet und dann eine gute Note erzielt, sagt man: „Das war kein Zufall“, obwohl durchaus eine Wahrscheinlichkeit besteht, eine weniger gute Note zu erhalten.

1.7. Zufall und Gleichwahrscheinlichkeit

Man spricht vom Zufall, wenn es mehrere Möglichkeiten gibt, die gleichwahrscheinlich oder auch nur näherungsweise gleichwahrscheinlich sind. Teilweise wird auch die Formulierung „reiner Zufall“ verwendet, wenn die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse eines Vorganges gleich sind.

- Es ist Zufall, welches der möglichen Ergebnisse beim Münzwurf oder beim Werfen eines Würfels eintritt.
- Wenn zwei etwa gleich starke Mannschaften gegeneinander spielen, so ist es Zufall, welche Mannschaft gewinnt bzw. ob das Spiel unentschieden endet.

Dieser Aspekt des Zufallsbegriffs ist in der Mathematik Inhalt der Fachbegriffe **zufällige Auswahl** und **Zufallsstichprobe.** Diese Begriffe enthalten weiterhin den inhaltlichen Aspekt der Nichtbeeinflussbarkeit durch Personen. Man spricht nur dann von einer zufälligen Auswahl bzw. Zufallsstichprobe, wenn man das Ergebnis der Auswahl nicht beeinflussen kann. Dies wäre z. B. der Fall, wenn man beim Ziehen aus einem Behälter in diesen hineinsehen darf oder wenn dieser durchsichtig ist.

Da in der Mathematik der Aspekt der Gleichwahrscheinlichkeit sehr eng mit dem Zufallsbegriff verbunden ist, werden oft Untersuchungen zu den Vorstellungen von Schülern zum Zufallsbegriff am Beispiel von stochastischen Situationen mit gleichwahrscheinlichen Ergebnissen durchgeführt.

2. Zufallsbegriff in der Literatur zum Primarstufenunterricht

In der didaktischen Literatur zum Mathematikunterricht in der Primarstufe wird der Auseinandersetzungen mit dem Zufallsbegriff oft eine große Bedeutung beigemessen. Nach Ulm (2009) ist es ein Ziel der Grundschulmathematik, „bei den Schülern ein Grundverständnis für das Phänomen ‚Zufall' zu erzeugen" (S. 10). Grassmann (2010) stellt das Wort „Zufall" als „fachlichen Hintergrund" ins Zentrum ihres Überblicks über zentrale Fachbegriffe des Gebietes „Zufall und Wahrscheinlichkeit" (S. 197). Schnell (2014) ordnet alle Überlegungen zum Stochastikunterricht in der Grundschule in die Erschließung des „Phänomens Zufall" ein.

Untersucht man die konkrete Verwendung des Begriffs Zufall in der betreffenden Literatur so zeigt sich, dass in der Regel keine Aspekte des Begriffs unterschieden werden und nur allgemein vom „Zufall" gesprochen wird. Weiterhin kann man generell feststellen, dass als Vorschläge zur Behandlung des Themas „Zufall" nur Beispiele aus dem Glücksspielbereich bzw. dem Arbeiten mit Zufallsgeräten gebracht werden (Ahrens 2009; Breiter et al. 2009; Berther 2010; Grassmann 2010; Kleimann 1997; Schnell 2014; Ulm 2009; Vogel 2012). Typisch sind folgende Aussagen: „Beim Werfen eines Würfels ist es Zufall, welche der sechs Seiten des Würfels oben liegt." (Ahrens 2009, S. 17). „Was ist Zufall? Unter der mathematischen Brille betrachtet, denkt man hierbei an Experimente unter gleichen Bedingungen, beliebig oft wiederholbar mit nicht festgelegtem Ausgang." (Gasteiger 2007, S. 22) Selbst wenn in der Literatur zunächst die Verwendungen des Wortes Zufall in alltäglichen Situationen angesprochen wird, erfolgt dann bei den konkreten Unterrichtsvorschlägen eine vollständige Beschränkung auf Situationen aus dem Glücksspielbereich (Büchter et al. 2005; Gasteiger 2007).

Es werden auch Aussagen zu sicheren, möglichen oder unmöglichen Ereignissen unter das Thema Zufall subsummiert. So schlägt Ulm (2009) vor, mit dem Schüler über Zufall zu reden, indem Begriffe wie sicher, möglich oder unmöglich geschärft werden. Im Anschluss daran sollte die Frage aufgeworfen werden, was eigentlich im Leben vom Zufall abhängig ist.

Bei Wahrscheinlichkeitsvergleichen werden gelegentlich Steigerungen des Begriffs „zufällig" verwendet. So meint Ulm (2009), dass man manchmal ausdrücken möchte, ob ein Ereignis „zufälliger" als ein anderes ist. Eine solche, wenig sinnvolle Sprechweise, kann zur weiteren Verwirrung der Schüler beitragen.

Das Auftreten von Ergebnissen mit geringer Wahrscheinlichkeit wird dem Zufall zugeschrieben, der nach (Klunter et al. 2011, S. 74) „Gesetzmäßigkeiten außer Kraft setzen" kann. Es ist aber auch eine „Gesetzmäßigkeit" bei stochastischen Erscheinungen, dass sehr seltene Ergebnisse auftreten können und man sogar ihre Wahrscheinlichkeit bestimmen kann.

Konsequenzen für den Unterricht in der Primarstufe

Die vielfältigen und teilweise widersprüchlichen Bedeutungen des Wortes „Zufall" bei Kindern behindern aus unserer Sicht im erheblichen Maße eine Kommunikation im Unterricht zu diesem Thema. Wie auch Amir und Williams (1999) im Ergebnis ihrer Untersuchungen feststellten, stimmt die Mehrzahl der Kinder unterschiedlichen Auffassungen zu. Für ein Verständnis stochastischer Situationen ist die Verwendung des Zufallsbegriffs in den meisten Fällen nicht erforderlich und verhindert teilweise das Erkennen des stochastischen Charakters der Situation. Lediglich im Glücksspielbereich kann der dort verwendete Aspekt des Zufallsbegriffs als Ausdruck der Gleichwahrscheinlichkeit der Ergebnisse im Unterricht sinnvoll verwendet werden.

Im Unterschied zu vielen anderen Autoren schlagen wir deshalb vor, den Stochastikunterricht in der Primarstufe nicht auf Diskussionen zum Zufallsbegriff aufzubauen und dieses Wort möglichst selten zu verwenden. Wir stimmen in dieser Frage der folgenden Ansicht von Gasteiger zu: „Für den

Stochastikunterricht ist nicht in erster Linie entscheidend, ob man ein Ereignis eindeutig mit dem Etikett ‚Zufall' belegen kann oder nicht, sondern ob man über dieses Ereignis mithilfe stochastischer Überlegungen Aussagen zur Wahrscheinlichkeit des Eintreffens fällen kann" (2007, S. 23). Im Anfangsunterricht sollten zunächst reichhaltige Vorstellungen zu stochastischen Situationen außerhalb des Glücksspielbereichs entwickelt werden, bei denen die Verwendung der Wörter „Zufall" und „zufällig" nicht notwendig und sinnvoll sind. Erst im weiterführenden Unterricht sollte man nach unseren Vorschlägen auch Beispiele aus dem Glücksspielbereich thematisieren. Dann kann in sinnvoller Weise von Zufall und zufällig gesprochen werden. Für diese Vorgehensweise sprechen auch die Befragungsergebnisse von Klunter und Raudis (2010) sowie Binner et al. (Binner et al. 2012) zum Zufallsbegriff, bei denen von den Kindern nur sehr wenige Beispiele aus dem Glücksspielbereich genannt wurden. Das Wort Zufall ist bei Kindern eher mit überraschenden Ereignissen aus dem Alltag verbunden.

3. Zu den Begriffen „zufälliges Ereignis", „Zufallsexperiment" und „Zufallsgerät"

Wir wollen im Folgenden die Wortverbindungen zufälliges Ereignis, Zufallsexperiment (Zufallsversuch), Zufallsgerät und Zufallsgenerator diskutieren und unsere Standpunkte zu ihrer Behandlung im Primarstufenunterricht formulieren und begründen.

Die Wortkombination „**zufälliges Ereignis**", die nur gelegentlich in der Fachliteratur verwendet wird, sollte aus unserer Sicht im Unterricht der Primarstufe und auch der Sekundarstufe I möglichst vermieden werden, da die sehr unterschiedlichen individuellen Auffassungen vom Wort „zufällig" nicht nur im Umgang mit Daten, sondern auch im Rahmen des Arbeitens mit Wahrscheinlichkeiten zu inadäquaten Vorstellungen führen können. Hinzu kommt, dass das Wort „Ereignis" aufgrund seiner umgangssprachlichen Bedeutung weitere Verständnisschwierigkeiten beinhaltet. Als Ereignis wird im Alltag meist ein besonderes Vorkommnis, also ein Ergebnis mit geringer Wahrscheinlichkeit bezeichnet. Der Begriff „Ereignis" ist ein Grundbegriff der Wahrscheinlichkeitstheorie. Er wird definiert als Teilmenge der Ergebnismenge eines Zufallsexperimentes und kann auch als Aussage über die Ergebnisse bezeichnet werden.

Mit dem Begriff **Zufallsexperiment** sind eine Reihe von Problemen verbunden. Als eine Begründung für seinen Gebrauch in der Schule wird angeführt, dass es sich um einen Fachbegriff der Wahrscheinlichkeitstheorie handelt. Dies ist aber nicht der Fall, er wird beim axiomatischen Aufbau der Theorie nicht benötigt. Trotzdem tritt er in vielen Fachbüchern als theoretischer Begriff auf, um die Modellierung stochastischer Vorgänge zu beschreiben. Henze (2013) spricht von einem „idealen Zufallsexperiment" (S. 3). Oft wird allerdings, wie auch in vielen fachdidaktischen Publikationen und Schulbüchern oft keine klare Trennung zwischen der Realebene und der Modellebene vorgenommen. So werden etwa als Beispiele für Zufallsexperimente reale Vorgänge wie das Würfeln, das Ziehen von Losen oder das Durchführen einer Umfrage angegeben. So verstehen Kütting und Sauer (2011) unter einem Zufallsexperiment „reale Vorgänge (Versuche) unter exakt festgelegten Bedingungen …", wobei sie betonen, dass sich der Begriff „einer exakten Beschreibung entzieht" (S. 89).

Es wird als wesentliches Merkmal eines Zufallsexperimentes in der Regel die beliebige Wiederholbarkeit unter gleichen Bedingungen genannt. Als erste Beispiele für Zufallsexperimente werden in der Fachliteratur dann vor allem Vorgänge aus dem Glücksspielbereich genannt, sodass der Eindruck entsteht, dass Zufallsexperimente als reale Vorgänge nur in diesem Bereich vorkommen. Der Anwendungsbereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung erstreckt sich aber über fast alle Bereiche der gesellschaftlichen Realität. Auch das Frühstück essen, der tägliche Gang zur Schule, der Unterrichtsverlauf, oder die Freizeitgestaltung gehören dazu. Die betreffenden Vorgänge wiederholen sich ebenfalls, aber natürlich nicht unter den genau gleichen festgelegten Bedingungen wie beim Würfeln, woraus sich entsprechende Überlegungen zum Vergleich der Bedingungen ergeben.

Die verbreitete enge Auffassung zum Begriff „Zufallsexperiment" zusammen mit seiner Nennung in den Bildungsstandards ist aus unserer Sicht eine Hauptursache dafür, dass in der Primarstufe eine wesentliche Einschränkung der betrachteten stochastischen Situationen vorherrscht, im dem vorrangig solche Vorgänge wie das Werfen von Gegenständen wie Würfel, Münzen, Quadern oder sogar auch Reißzwecken, das Drehen von geeigneten Objekten oder das Ziehen aus Behältern betrachtet werden.

In einem der wenigen Beiträge, in dem es auch um Vorgänge im Alltag geht, schreibt die Autorin: "Hierbei sollte es zunächst nicht um Ereignisse in Zufallsexperimenten gehen, wie im Beschluss der Kultusministerkonferenz festgelegt, sondern um Aussagen, die den Alltag betreffen (Spindler 2010, S. 34)." In ihrer Untersuchung mit Zweitklässlern sollten die Kinder vorgelegte Aussagen bezüglich ihres Wahrscheinlichkeitsgrades auf einer vierstufigen Skala einschätzen. Darunter gab es auch Aussagen zu Ergebnissen stochastischer Vorgänge, wie der Wetterentwicklung, dem Leben eines Fahrradschlauches, dem Gang zur Schule oder dem Schlafen in der Nacht, die alle durch den theoretischen Begriff Zufallsexperiment in seiner weiten Bedeutung erfasst werden.

Ein weiteres Problem ergibt sich aus der Tatsache, dass der Begriff Experiment in den Naturwissenschaften einen klar umrissenen Inhalt hat. Experimente werden von Individuen geplant, durchgeführt und ausgewertet. Sie dienen zur Überprüfung von wissenschaftlichen Hypothesen. In Schulbüchern werden Zufallsexperimente oft als spezielle Experimente erklärt und gegenüber naturwissenschaftlichen Experimenten abgegrenzt. Der Fokus liegt dabei wieder auf Glücksspielsituationen. In stochastischen Anwendungen werden aber oft Situationen betrachtet, die man nicht als Experimente bezeichnen kann. Dies betrifft insbesondere alltägliche Situationen wie der Gang zur Schule, das Schreiben einer Mathematikarbeit oder die Entwicklung von Freizeitinteressen, aber auch ein normales „Mensch ärgere dich nicht“-Spiel.

Bei dem Wort „**Zufallsversuch**“, das teilweise anstelle von „Zufallsexperiment“ oder synonym dazu verwendet wird, ist die Gefahr der Vermischung mit dem naturwissenschaftlichen Begriff „Experiment“ zwar etwas geringer, aber das Wort „Versuch“ hat auch die Bedeutung von Experiment und ein Versuch ist immer an eine den Versuch ausführende Person gebunden. Versuch bedeutet aber auch eine einmalige Durchführung eines Vorgangs (ein Versuch im Weitsprung), was teilweise zur Unterscheidung von Versuch und Experiment führte.

Wir schlagen vor, eine klare begriffliche Trennung zwischen der theoretischen Ebene und der Realität vorzunehmen. Der Begriff Zufallsexperiment sollte auch in der Schule so verwendet werden, wie er in der Fachwissenschaft bei seinem gelegentlichen Auftreten erklärt wird. Zunächst einmal muss klar herausgestellt werden, dass es sich bei einem Zufallsexperiment nicht um ein reales Experiment, sondern um ein gedankliches Konstrukt handelt, was man auch als Gedankenexperiment bezeichnen kann. Bei diesem Gedankenexperiment ist eine Menge von Ergebnissen gegeben, die als Ergebnismenge bezeichnet wird. Im Folgenden beschränken wir uns auf abzählbare Ergebnismengen. Alle Ergebnisse haben eine bestimmte, in der Regel unterschiedliche Wahrscheinlichkeit, deren Summe den Wert 1 ergibt. Eine Durchführung des Experimentes besteht darin, dass ein Element der Ergebnismenge zufällig ausgewählt wird. Zufällige Auswahl eines Ergebnisses bedeutet, dass alle Ergebnisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, ausgewählt zu werden. Dieses Experiment kann in Gedanken beliebig, also unendlich oft wiederholt werden. Bei einer solchen Begriffsfassung macht es keinen Sinn, von Bedingungen des Experimentes, von der Nichtvorhersehbarkeit der Ergebnisse oder auch von „einfachen“ Zufallsexperimenten zu sprechen.

In der Ebene der realen Erscheinungen und auch in der Ebene der Realmodelle sollte der Begriff „stochastischer Vorgang“ verwendet werden, der in der Modellebene durch den Begriff Zufallsexperiment erfasst wird. Wie schon an mehreren Stellen betont, halten wir es nicht für sinnvoll in der Primarstufe bereits Begriffe aus der Ebene der theoretischen Modelle einzuführen bzw. ein System von Gedanken aus dieser Ebene bei verwendeten Wörtern auszubilden.

Mit Blick auf die Verwendungen des Begriffs Zufallsexperiment kann vermutet werden, dass die Autoren der Leitidee Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit unter Zufallsexperiment einen Spezialfall stochastischer Situationen verstanden, nämlich Vorgänge aus dem Glücksspielbereich. Dazu ist festzustellen, dass zum einen Begriffe in zentralen Dokumenten eindeutig sein sollten und zum anderen diese Vorgänge nur einen kleinen Teil von stochastischen Situationen im Alltag der Kinder betreffen. Hinzu kommt, dass sich bei näherer Betrachtung diese Vorgänge aus inhaltlicher und formaler Sicht keineswegs als einfach erweisen. Dies haben wir an mehreren Stellen unseres Buches nachgewiesen.

Die in der didaktischen Literatur und in der Schule häufig verwendete Bezeichnung **Zufallsgerät** ist kein Fachbegriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Darunter versteht man Objekte wie Münze, Würfel, Glücksrad oder Ziehungsbehälter (Urne), die bei stochastischen Vorgängen verwendet werden und mit denen man schnell Ergebnisse von Vorgängen unter gleichen Bedingungen erzeugen kann. Bei der Verwendung dieser Bezeichnung wird ebenfalls oft nicht deutlich genug zwischen einem realen Objekt und seinem theoretischen Modell unterschieden. Kann etwa auch das Zufallsgerät „Würfel“ vom Tisch fallen oder „auf Kippe“ liegen? In Schullehrbüchern werden solche ungültigen Versuchsausgänge meist nicht betrachtet. Es wird implizit davon ausgegangen, dass reale Zufallsgeräte kein außergewöhnliches Verhalten zeigen. Wir haben es bei unseren Experimenten mit Münzen nicht selten erlebt, dass bei einem gleichzeitigen Wurf von zehn Münzen eine hochkant liegen bleibt.

Deshalb sollte auch in diesem Fall eine klare begriffliche Trennung zwischen der Ebene der realen Erscheinungen und der theoretischen Modelle vorgenommen werden und schlagen folgendes vor:

Es ist im Unterricht nicht erforderlich und sprachlich wenig sinnvoll von „Zufallsgeräten“ zu sprechen, wenn man die realen Objekte meint. Man kann sie direkt als Würfel, Münze usw. bezeichnen und als Oberbegriff das Wort „**Glücksspielgeräte**“ verwenden, wie wir es in diesem Buch tun.

Wenn über reale Glückspielgeräte auf der theoretischen Ebene in wissenschaftlichen Publikationen gesprochen werden soll, kann der Begriff „Zufallsgerät“ auf der Modellebene verwendet werden. Dabei sollte dieser Begriff mit folgenden Merkmalen verbunden werden.

- Zufallsgeräte sind gedankliche Objekte.
- Beim Einsatz von Zufallsgeräten gibt es genau festgelegte Ergebnisse mit festgelegten Wahrscheinlichkeiten.
- Es gibt keine Bedingungen des Vorgangs, die die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse beeinflussen.

Mit dem so gebildeten Begriff „Zufallsgerät“ kann dann zwischen den realen Glücksspielgeräten und ihrer modellhaften Beschreibung unterschieden werden. Diese Unterscheidung ist im Unterricht ohne Einführung eines neuen Begriffs möglich, wenn man die genannten Merkmale als generelle, vereinfachende Voraussetzungen von Aufgabenstellungen mit Glücksspielgeräten auf der Ebene der Realmodelle vereinbart.

Um zwischen einem realen Vorgang mit einem Glücksspielgerät und einem Verwenden des entsprechenden Zufallsgerätes auf theoretischer Ebene zu unterscheiden, sei auf die Möglichkeit einer exakten Definition von Zufallsgeräten und Zufallsexperimenten mit diesen Geräten im mathematischen Sinne hingewiesen (Sill 2010). So lässt sich das Zufallsgerät *Würfel* definieren als ein Würfel im mathematischen Sinne, bei dem jeder der sechs Seiten genau einer der Zahlen 1 bis 6 zugeordnet ist. Das Zufallsexperiment *Würfeln* wird definiert durch die Ergebnismenge {1, 2, 3, 4, 5, 6}, wobei jedes Ergebnis die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} = 1,\overline{6}$ hat.

Es ist nicht möglich, das Zufallsexperiment *Würfeln* im Kopf tatsächlich auch durchzuführen, um Ergebnisse zu erhalten. Das menschliche Gehirn ist nicht in der Lage, eine zufällige Auswahl aus einer Ergebnismenge vorzunehmen. Ausgedachte Würfelergebnissen erfüllen nicht die Anforderungen an eine zufällige Auswahl, da zum Beispiel nicht alle Ergebnisse oder auch Kombinationen von Ergebnissen in der Anzahl vorkommen, wie es bei einer zufälligen Auswahl zu erwarten wäre.

Deshalb wurden in der Mathematik Verfahren entwickelt, um mit möglichst hoher Genauigkeit eine zufällige Auswahl vorzunehmen. Diese Verfahren bestehen in der Erzeugung von sogenannten **Zufallszahlen** und werden als **Zufallszahlengeneratoren**, kurz **Zufallsgenerator** (Henze 2004, S. 148) bezeichnet. Es gibt physikalische Zufallszahlengeneratoren, die zum Beispiel physikalische Effekte wie radioaktive Zerfallsprozesse verwenden, aber technisch sehr aufwändig sind. Deshalb wurden sogenannte **Pseudozufallszahlengeneratoren** entwickelt, mit denen Zufallszahlen durch ein algorithmisches Verfahren erzeugt werden. Diese sind z. B. in Taschenrechnern installiert und können häufig mit der Taste „Ran“ (engl. random) abgerufen werden. Es gibt Testverfahren um die Qualität von Pseudozufallszahlengeneratoren zu überprüfen, in welchem Grad die erzeugten ein- oder mehrstelligen Zufallszahlen „zufällig“ entstanden sind. So wird z. B. bei einer sehr großen Anzahl von erzeugten Zufallszahlen überprüft, ob alle einstelligen Zahlen oder alle Zahlen mit zwei gleichen Ziffern im Rahmen bestimmter Schwankungsbreiten mit der gleichen Häufigkeit auftreten. Die „Zufälligkeit“ der mit Zufallsgeneratoren erzeugten Zufallszahlen ist eine Eigenschaft ihrer Reihenfolge. Alle „Geheimnisse“ des Zufalls sind in einer großen Tabelle mit Zufallszahlen enthalten.

Der Begriff Zufallsgenerator wird in der fachdidaktischen Literatur und in Schullehrbüchern teilweise synonym zum Begriff Zufallsgerät als Bezeichnung für bestimmte Objekte verwendet. Mit Blick auf die Verwendung dieses Wortes in der Fachwissenschaft sollte darauf in der Schule verzichtet werden. Die Begriffsverwirrung wird noch vergrößert, wenn von „asymmetrischen“ Zufallsgeneratoren gesprochen wird, da das wesentliche Merkmal eines Zufallsgenerators gerade die Gleichwahrscheinlichkeit der Ergebnisse ist.

4. Beschreibung von Aspekten des Zufallsbegriffs mit einer Prozessbetrachtung und mit Wahrscheinlichkeitsaussagen

Im Folgenden soll an vier typischen Beispielen verdeutlicht werden, dass durch eine Prozessbetrachtung die aufgeführten Aspekte des Zufallsbegriffs in einheitlicher Weise analysiert und unter Verwendung von Wahrscheinlichkeitsaussagen beschrieben werden können, ohne dabei die Wörter „Zufall“ oder „zufällig“ zu verwenden. Dabei kommen zwei wesentliche Aspekte der Prozessbetrachtung zum Tragen, eine Orientierung auf das, was abläuft sowie die Betrachtung eines einzelnen Vorgangs.

Häufig werden in der Literatur nur eingetretene Ereignisse untersucht und als zufällig oder nicht zufällig bezeichnet. Weiterhin wird in Situationen, bei denen es um die Wiederholung von Vorgängen geht, diese Vorgänge selber nicht bestimmt und analysiert.

Beispiel 1: Mischen von Kugeln und Karten

Bei der Durchmischung von Perlen geht es um den Vorgang „Bewegung einer Perle im Behälter“ mit dem Merkmal „Lage der Kugel im Behälter“. Entsprechend der Anzahl der Perlen im Behälter laufen mehrere dieser Vorgänge gleichzeitig ab. Eine vollständige Durchmischung ist erreicht, wenn die Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Lagen bei jeder Perle gleich sind. Werden wie in unserem vorgeschlagenen Experiment zuerst blaue und dann gelbe Perlen vorsichtig in den Behälter geschüttet, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich eine gelbe Perle weiter unten befindet kleiner als die Wahrscheinlichkeit, dass sie weiter oben liegt.

Während es beim Mischen von Kugeln in einem Behälter noch relativ einfach ist, durch entsprechendes Schütteln oder Umrühren eine gleichmäßige Durchmischung herzustellen, ist dies für das Mischen von Karten durchaus ein anspruchsvolles Problem. Es gibt verschiedene Mischtechniken, von denen mehrfaches Riffeln zu einer guten Durchmischung führt und so in Spielcasinos angewendet wird.

Beispiel 2: Abweichungen vom erwarteten Wert

Wenn vom Zufall als „Rauschen im Signal“ bzw. von signifikanten und nichtsignifikanten Abweichungen gesprochen wird, handelt es sich immer um das wiederholte Ablaufen von stochastischen Vorgängen, zum Beispiel um das wiederholte Werfen einer Münze. Ein stochastischer Vorgang wird durch Bedingungen beeinflusst, die bei allen Wiederholungen konstant sind (z. B. die verwendete Münze), und Bedingungen, deren Ausprägungen sich bei jeder Wiederholung ändern (z.

B. die konkreten Abwurfdaten). Die bei jeder Wiederholung jeweils anderen Ausprägungen der variablen Bedingungen sind die Ursachen für das jeweils eingetretene Ergebnis.

Auf der Grundlage von Modellannahmen zu den konstanten und variablen Bedingungen kann man die zu erwartenden Häufigkeiten der möglichen Ergebnisse berechnen. Wird zum Beispiel eine normale Münze geworfen, so kann man modellhaft annehmen, dass die Münze homogen und symmetrisch ist und damit beide Seiten physikalisch nicht unterscheidbar sind. Wird weiterhin vorausgesetzt, dass die Münze immer auf einer glatten Unterlage landet und dabei auf eine der beiden Seiten fällt sowie ein Mensch die Münze wirft, so dass durch den Abwurf nicht eine der beiden Seiten bevorzugt wird, kann man als Realmodell annehmen, dass beide Seiten die gleiche Wahrscheinlichkeit von 0,5 haben. Aus diesen Voraussetzungen kann man mit dem mathematischen Modell der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Anzahlen des Ergebnisses „Zahl" bei einer bestimmten Anzahl von Würfen sowie die erwartete Anzahl des Ergebnisses berechnen. Wird zum Beispiel eine Münze 100-mal geworfen, so kann man erwarten, dass 50-mal „Zahl" fällt. Obwohl dies die wahrscheinlichste Anzahl ist, beträgt die Wahrscheinlichkeit für 50-mal „Zahl" nur etwa 8 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass „Zahl" mindestens 40-mal und höchstens 60-mal fällt, beträgt aber 96,5 %. Alle Anzahlen kleiner als 40 und größer als 60 haben zusammen also nur eine Wahrscheinlichkeit von 3,5 %. Wenn ein solch seltenes Ereignis, also zum Beispiel 39-mal Zahl auftritt, spricht man von einer signifikanten Abweichung vom Erwartungswert 50. Da die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer solchen Anzahl recht klein ist, wird dies als Indiz dafür angesehen, dass die Modellannahmen falsch sind. Bei dem Münzwurf könnte es bedeuten, dass beide Seiten nicht physikalisch gleich sind, da die Münze eventuell gefälscht ist oder nicht aus homogenem Material besteht. Signifikante Abweichungen sind aber keine unmöglichen Versuchsergebnisse und können deshalb auch bei richtigen Modellannahmen durchaus auftreten. Bei der Betrachtung von signifikanten Abweichungen geht es also letztlich um die Interpretation von Ereignissen mit kleiner Wahrscheinlichkeit. Es lassen sich aber nur Hypothesen über die tatsächlichen Verhältnisse aufstellen.

Die Überlegungen am Beispiel des Münzwurfes verdeutlichen, dass die Wiederholung von stochastischen Vorgängen zur Untersuchung von Abweichungen vom Erwartungswert mit zahlreichen inhaltlich und mathematisch sehr anspruchsvollen Problemen verbunden ist, die weit über das Verständnis von Primarstufenschülern und die zur Verfügung stehenden mathematischen Möglichkeiten hinausgehen. Wir empfehlen deshalb, auf solche Aufgabenstellungen (Welche?) in der Primarstufe möglichst zu verzichten.

Beispiel 3: Unfallgeschehen im Straßenverkehr

Zur Durchführung einer Prozessbetrachtung muss ein einzelner Vorgang im Straßenverkehr bestimmt werden, also z. B. „Herr Müller fährt Auto." oder „Ina geht zur Schule." Als Merkmal wird betrachtet ob ein Unfall passiert. Ausprägungen des Merkmals könnten sein: kein Unfall, ein leichter Unfall, ein schwerer Unfall, ein sehr schwerer Unfall oder ein tödlicher Unfall. Der Vorgang wird beeinflusst durch solche Faktoren wie die Erfahrungen der Verkehrsteilnehmer, ihr Reaktionsvermögen in Gefahrensituationen, ihre Aufmerksamkeit, die Dichte des Straßenverkehrs oder das Verhalten der anderen Verkehrsteilnehmer. Entsprechend der Ausprägungen der allgemeinen Bedingungen bei Herrn Müller oder bei Ina gibt es für die angegebenen Werte des Merkmals bestimmte Wahrscheinlichkeiten. So könnten Schüler etwa formulieren, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Ina einen Unfall auf dem Weg zur Schule hat, sehr gering ist, da sie diesen Weg schon sehr oft gegangen ist, sehr aufmerksam und vorsichtig ist und es auf ihrem Schulweg sehr wenig Verkehr gibt. Man kann über die Wahrscheinlichkeit sprechen, dass Herr Müller einen Unfall verursacht bzw. dass er in einen Unfall schuldlos verwickelt wird. Die Wahrscheinlichkeitsaussagen hängen von den Informationen ab, die über die Fahrweise von Herrn Müller, den Verkehr auf seiner Straße, den Zustand seines Autos oder über andere Bedingungen hat. In allen Fällen ist das Wort Zufall nicht erforderlich.

Ein Problem ist allerdings, dass man zwar von einer Wahrscheinlichkeit für die Merkmalsausprägungen bei einem einzelnen Verkehrsteilnehmer sprechen kann, diese aber numerisch nicht bestimmen könnte. Man kann lediglich die Unfallrate einer Person ermitteln, indem man die Anzahl der Unfälle bezüglich eines bestimmten Fahrwegs ermittelt (z. B. Unfälle pro 10 000 km Fahrstrecke). Dabei muss es sich aber um vergleichbare Fahrstrecken handeln, man kann zum Beispiel nicht Fahrten auf Autobahnen oder in Städten zusammenfassen.

Bei der Verkehrserziehung, zu der Warwitz (2009) sehr geeignete Vorschläge unterbreitet, geht es darum, Bedingungen des Vorgangs so zu ändern, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Unfall geringer wird.

Beispiel 4: Auftreten von Mängeln oder Fehlern in Objekten

In einem Arbeitsblatt zum Zufallsbegriffs sollen die Schüler entscheiden ob es sich bei dem Ereignis „eine neu gekaufte CD lässt sich nicht abspielen“ um Zufall oder nicht handelt (Gasteiger 2007, S. 27). Die Autorin stellt fest, dass es darauf keine eindeutige Antwort gibt, da auch der Kontext entscheidend ist (S. 23). Wenn man aus Sicht einer Prozessbetrachtung fragt, welche Vorgänge zu dem Ergebnis geführt haben bzw. mit ihm verbunden werden können, sind drei Antworten möglich. Dies kann zum einen der Vorgang der Herstellung der CD mit dem Merkmal „Abspielbarkeit“ betrachtet werden. Weiterhin könnte der Vorgang Abspielen der CD in einem CD-Spieler betrachtet werden. Bei diesem Vorgang gehören die Qualität der CD, die Funktionsfähigkeit des Gerätes oder ein möglicher Kopierschutz zu den Einflussfaktoren. Der Situation am nächsten kommt aber der Vorgang der Suche nach den Ursachen für die Nichtabspielbarkeit. Bei diesem Vorgang geht es um das Überprüfen von Hypothesen wie „Die CD ist defekt“, „Der CD-Spieler ist defekt.“ oder „Es gibt einen Kopierschutz.“ Bei allen Vorgängen können Wahrscheinlichkeitsaussagen zu den möglichen Ergebnissen getroffen werden.

Literaturverzeichnis

Ahrens, Anne (2009): Glück oder Mathematik? In: *Grundschulmagazin* (2), S. 17–19.

Amir, Gilead Shmuel; Williams, Julian Scott (1999): Cultural Influences on Children's Probabilistic Thinking. In: *Journal of Mathematical Behavior* 18 (1), S. 85–107.

Batanero, Carmen; Henry, Michel; Parzysz, Bernard (2005): The nature of chance and probability. In: Graham A. Jones (Hg.): Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning. Boston, MA: Springer Science+Business Media Inc (Mathematics Education Library, 40), S. 16–42.

Bernoulli, Jakob (1899): Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dritter und vierter Teil. Unter Mitarbeit von Übersetzt und hrsg. von R. Haussner. Leipzig: Wilhelm Engelmann (Ostwald's Klassiker der exakten Naturwissenschaften, 108).

Berther, Hélène (2010): Im Kreis gedreht. Stochastisches Denken bei Zehn-bis Zwölfjährigen aktivieren. In: *Grundschule* (5), S. 26–29.

Binner, Elke; Itzigehl, Petra; Schroeder, Claudia; Schuster, Ramona (2012): Gewagt ist gewonnen - dem Zufall eine Chance geben. In: *Grundschulunterricht / Mathematik* (3), S. 8–12.

Breiter, Elisabeth; Pfeil, Carolin; Neubert, Bernd (2009): Das Thema "Zufall" im Mathematikunterricht der Grundschule. In: *Sache - Wort - Zahl* 37 (102), S. 27–38.

Büchter, Andreas; Hußmann, Stephan; Leuders, Timo; Prediger, Susanne (2005): Den Zufall im Griff? Stochastische Vorstellungen fördern. In: *Praxis der Mathematik* 47 (4), S. 1–7.

Cournot, Antoine Augustin (1849): Die Grundlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung : leicht faßlich dargestellt für Philosophen, Staatsmänner, Juristen, Kameralisten und Gebildete überhaupt. Unter Mitarbeit von Deutsch hrsg. von C. H. Schnuse. Braunschweig: Leibrock.

Döhrmann, Martina (2004): Zufall, Aktien und Mathematik. Vorschläge für einen aktuellen und realitätsbezogenen Stochastikunterricht. Hildesheim [u.a.]: Franzbecker (Texte zur mathematischen Forschung und Lehre, 35).

Döhrmann, Martina (2005): Schülervorstellungen zum Begriff „Zufall“. In: Günter Graumann (Hg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2005. Vorträge auf der 39. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 28.2. bis 4.3.2005 in Bielefeld. 39. Tagung für Didaktik der Mathematik. Bielefeld, 28.2. bis 4.3. Hildesheim [u.a.]: Franzbecker, S. 167–170.

Eichler, Andreas; Vogel, Markus (2009): Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH Wiesbaden (Springer-11777 /Dig. Serial]). Online verfügbar unter http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8348-9996-5.

Engel, Joachim (2010): Anwendungsorientierte Mathematik: von Daten zur Funktion. Eine Einführung in die mathematische Modellbildung für Lehramtsstudierende. Berlin, Heidelberg: Springer (Mathematik für Lehramt).

Gasteiger, Hedwig (2007): Die Kunst des Mutmaßens. In: *lernchancen* (55), S. 22–27.

Grassmann, Marianne (2010): "Mach doch eine Skizze!". In: *Grundschule* (5), S. 34–37.

Herget, Wilfried; Hischer, Horst; Richter Karin (2005): Was für ein Zufall!? Einige Bemerkungen über einen wenig beachteten Kern der Stochastik. Universität des Saarlandes. Saarbrücken (Preprint / Fachrichtung Mathematik, Universität des Saarlandes, 140). Online verfügbar unter http://scidok.sulb.uni-saarland.de/volltexte/2012/4507/pdf/preprint_140_05.pdf.

Kleimann, Heike (1997): Zufall und Wahrscheinlichkeit. In: *Grundschule* (9), S. 52–54.

Klunter, Martina; Raudies, Monika (2010): „Das ist doch unmöglich!“. Vorstellungen von Kindern zu Zufall und Wahrscheinlichkeit. In: *Grundschule* (5), S. 18–20.

Klunter, Martina; Raudies, Monika; Veith, Ute (2011): Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit. Unterrichtsideen zum Beobachten und Kombinieren für die Klassen 3 und 4. Dr. A,1. Braunschweig: Westermann (Praxis Impulse).

Kütting, Herbert (1994): Didaktik der Stochastik. Mannheim [u.a.]: BI-Wiss.-Verl. Online verfügbar unter http://www.worldcat.org/oclc/64509467.

Kütting, Herbert; Sauer, Martin J. (2011): Elementare Stochastik. Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte. 3., Aufl. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl. Online verfügbar unter http://www.worldcat.org/oclc/711835764.

Laplace, Pierre Simon de (1996): Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit. (1814). Reprint, 2. Aufl. Thun, Frankfurt am Main: Deutsch (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Bd. 233).

Moore, David S. (1990): Uncertainty. In: Lynn Arthur Steen (Hg.): On the shoulders of giants: New approaches to numeracy. Washington, DC: National Academy Press, S. 95–137.

Piaget, Jean (1975): Gesammelte Werke. Die Entwicklung des Erkennens II. Das physikalische Denken. Unter Mitarbeit von Fritz Kubli. 1. Aufl. Stuttgart: Klett (Gesammelte Werke, 9).

Piaget, Jean; Inhelder, Bärbel (1975): The origin of the idea of chance in children. New York: Norton.

Schnell, Susanne (2014): Muster und Variabilität erkunden. Konstruktionsprozesse kontextspezifischer Vorstellungen zum Phänomen Zufall. Wiesbaden: Springer Spektrum (Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts, 14).

Sill, Hans-Dieter (1993): Zum Zufallsbegriff in der stochastischen Allgemeinbildung. überarbeitete Fassung eines Vortrages auf der 25. Jahrestagung der GDM 1991 in Osnabrück. In: *ZDM* 25 (2), S. 84–88.

Sill, Hans-Dieter (2010): Zur Modellierung zufälliger Erscheinungen. In: *Stochastik in der Schule* 30 (3), S. 2–13.

Sill, Hans-Dieter; Kurtzmann, Grit Susann (2019): Didaktik der Stochastik in der Primarstufe. Berlin: Springer Spektrum (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II).

Spindler, Nina (2010): Ist es wahrscheinlich, dass die Lehrerin auf dem Heimweg einen Unfall hat? In: *Mathematik differenziert* (3), S. 34–40.

Ulm, Volker (2009): Stochastik - Teil mathematischer Bildung. In: *Grundschulmagazin* (2), S. 8–11.

Vogel, Rose (2012): "weil ich größer bin …" - Kinder erklären Gewinnchancen. In: *Grundschule Mathematik* (32), S. 16–19.

Warwitz, Siegbert A. (2009): Sind Verkehrsunfälle tragische Zufälle? In: *Sache - Wort - Zahl* 37 (102), S. 42–50.

Wenau, Gudrun (1991): Zur Behandlung ausgewählter Aspekte des Zufalls- und Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Grundschule. Dissertation. Pädagogische Hochschule, Güstrow. Pädagogische Fakultät.

Zawojewski, Judith; Nowakowski, Jeri; Boruch, Robert F. (1989): Romeo und Julia: Schicksal, Zufall oder freier Wille? In: *Stochastik in der Schule* 9 (1), S. 33–40.